

305

F

نام:

نام خانوادگی:

محل امضا:

بانک مقالات ایران

مرکز دانش و مقالات

علمی و پژوهشی و

سئوالات آزمونها

www.edub.ir



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»

امام خمینی (ره)

صبح جمعه

۱۳۹۵/۱۲/۶

دفترچه شماره (۱)

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

## آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه‌متمرکز) داخل – سال ۱۳۹۶

رشته امتحانی مهندسی مکانیک – دینامیک، کنترل و ارتعاشات (کد ۲۳۲۳)

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

| ردیف | مواد امتحانی                                                                            | تعداد سؤال | از شماره | تا شماره |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------|----------|----------|
| ۱    | مجموعه دروس تخصصی (ریاضیات مهندسی – دینامیک پیشرفته – ارتعاشات پیشرفته – کنترل پیشرفته) | ۴۵         | ۱        | ۴۵       |

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

اسفندماه – سال ۱۳۹۵

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متغییرن یا باز چاپ و انتشار می‌شود.

## ریاضیات مهندسی:

$$-1 \quad \text{با فرض اینکه } -\pi < x < \pi, x = -\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx) \quad \text{و} \quad -\pi < x < \pi, |x| = \frac{\pi}{\gamma} - \frac{\gamma}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma n - 1)x}{(\gamma n - 1)^{\gamma}} \quad -\pi < x < \pi$$

آنگاه سری فوریه مثلثاتی تابع  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ 0, & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$  کدام است؟

$$f(x) = \frac{\pi}{\gamma} - \frac{\gamma}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\gamma k - 1)^{\gamma}} \cos(\gamma k - 1)x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^k \sin(kx) \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{\gamma} - \frac{\gamma}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\gamma k - 1)^{\gamma}} \cos(\gamma k - 1)x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^k \sin(kx) \quad (2)$$

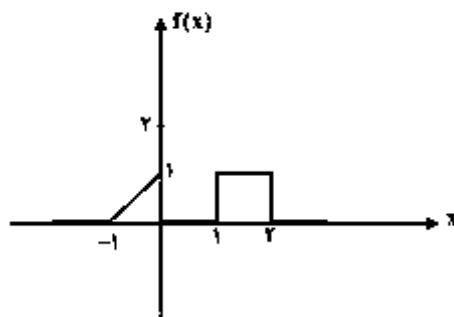
$$f(x) = \frac{\pi}{\gamma} + \frac{\gamma}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\gamma k - 1)^{\gamma}} \cos(\gamma k - 1)x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^k \sin(kx) \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{\gamma} + \frac{\gamma}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\gamma k - 1)^{\gamma}} \cos(\gamma k - 1)x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^k \sin(kx) \quad (4)$$

-۲ برای تابع نشان داده شده در شکل، چنانچه نمایش انتگرال فوریه آن را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] d\omega$$

آنگاه حاصل انتگرال  $\int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega$  کدام است؟



$$(1) \quad 0$$

$$(2) \quad \frac{\gamma}{\gamma \pi}$$

$$(3) \quad \frac{\gamma}{\gamma}$$

$$(4) \quad \frac{\gamma \pi}{\gamma}$$

-۳ اگر  $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\gamma \omega}{1 + \omega^{\gamma}} \sin \omega x d\omega$ ، آنگاه  $I = \int_0^{\infty} f(x) \sin^{\gamma} x dx$  کدام است؟

$$(1) \quad \frac{\gamma \pi}{5}$$

$$(2) \quad \frac{8\pi}{\gamma 5}$$

$$(1) \quad \frac{\gamma \pi}{10}$$

$$(2) \quad \frac{5\pi}{1\gamma}$$

۴- معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی  $u_{xx} + u_{yy} + u_y - u = 0$  در داخل مستطیل  $0 < y < 1$  و  $0 < x < b$  همراه شرایط مرزی  $u(x, 0) = 0$  و  $u(a, y) = u(b, y) = 0$  داده شده است. اگر برای این مسئله

$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x, y)$  باشد، که در آن  $c_k$  ها ضرایب ثابت هستند، آنگاه تابع  $u_k(x, y)$  کدام است؟

$$(e^{\tau y} - e^{\tau y}) \sin \alpha_k (b - x), \alpha_k = \frac{k\pi}{b+a}, \tau = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(1 + \alpha_k^2)}}{2} \quad (1)$$

$$(e^{\tau y} - e^{\tau y}) \sin \alpha_k (b - x), \alpha_k = \frac{k\pi}{b-a}, \tau = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha_k^2}}{2} \quad (2)$$

$$(e^{\tau y} - e^{\tau y}) \sin \alpha_k (b + x), \alpha_k = \frac{k\pi}{b-a}, \tau = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(1 + \alpha_k^2)}}{2} \quad (3)$$

$$(e^{\tau y} - e^{\tau y}) \sin \alpha_k (b - x), \alpha_k = \frac{k\pi}{b-a}, \tau = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(1 + \alpha_k^2)}}{2} \quad (4)$$

۵- برای حل مسئله مقدار مرزی غیرهمگن داده شده با شرایط اولیه و مرزی همگن به صورت زیر:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-x) \sin t = \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = u(x, 0) = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \end{cases}$$

می‌توان از بسط فوریه به صورت زیر استفاده نمود.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin(n\pi x), \quad F(x, t) = (1-x) \sin t = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin(n\pi x)$$

کدام یک از عبارتهای زیر صحیح است؟

$$u'_n(t) - n^2 \pi^2 u_n(t) = \frac{\sin t}{n\pi}, \quad F_n(t) = \frac{\tau}{n\pi} \sin t \quad (1)$$

$$u'_n(t) - n^2 \pi^2 u_n(t) = \frac{\tau \sin t}{n\pi}, \quad F_n(t) = \frac{1}{n\pi} \sin t \quad (2)$$

$$u'_n(t) + n^2 \pi^2 u_n(t) = \frac{\tau \sin t}{n\pi}, \quad F_n(t) = \frac{\tau}{n\pi} \sin t \quad (3)$$

$$u'_n(t) + n^2 \pi^2 u_n(t) = \frac{\sin t}{n\pi}, \quad F_n(t) = \frac{1}{n\pi} \sin t \quad (4)$$

۶- مسئله مقدار اولیه  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ،  $-\infty < x < \infty$ ،  $t > 0$  با شرایط اولیه  $y(x, 0) = e^{-|x|}$ ،  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$  را

فرض آن که پاسخ مسئله به شکل  $y(x, t) = \int_0^\infty [a(\omega) \cos(\omega x) + b(\omega) \sin(\omega x)] \cos(\omega c t) d\omega$  باشد. آنگاه  $a(\omega)$  و  $b(\omega)$  کدام است؟

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}, \quad b(\omega) = 0 \quad (1) \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}, \quad a(\omega) = 0 \quad (2)$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}, \quad b(\omega) = 0 \quad (3) \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}, \quad a(\omega) = 0 \quad (4)$$

۷- به ازای کدام ثابت‌های  $\gamma$ ، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \gamma w = 0$  دارای جواب کراندار غیر صفر

به صورت  $w(x, y) = F(x)G(y)$ ، در تمام ربع اول صفحه  $xy$  می‌باشد؟

$$\gamma > 0 \quad (1) \quad \gamma < 0 \quad (2)$$

$$\forall \gamma \in \mathbb{R} \quad (3) \quad \text{مسئله جواب ندارد} \quad (4)$$

۸- اگر  $z = x + iy$  عدد مختلط باشد، آنگاه  $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\pi} \cosh z\right)$ ، (قسمت موهومی) کدام است؟

$$\frac{x}{\pi} \sinh x \sin y + \frac{y}{\pi} \cosh x \cos y \quad (1) \quad \frac{x}{\pi} \cosh x \cos y - \frac{y}{\pi} \sinh x \sin y \quad (2)$$

$$-\frac{x}{\pi} \sinh x \sin y + \frac{y}{\pi} \cosh x \cos y \quad (3) \quad \frac{x}{\pi} \sinh x \cos y + \frac{y}{\pi} \cosh x \sin y \quad (4)$$

۹- اگر  $\operatorname{Im}\left(\operatorname{Log} \frac{z-1}{z+1}\right) = c$  (قسمت موهومی) و  $c$  ثابت و مخالف صفر باشد، آنگاه بیان این معادله بر حسب  $x$  و  $y$  کدام است؟

$$x^2 + (y - \tan c)^2 = \frac{1}{\cos^2 c} \quad (1) \quad x^2 + (y - \cot c)^2 = 1 \quad (2)$$

$$x^2 + (y - \tan c)^2 = \tan^2 c \quad (3) \quad x^2 + (y - \cot c)^2 = \frac{1}{\sin^2 c} \quad (4)$$

۱۰- حداکثر مقدار  $|e^{rz-i}|$  در ناحیه  $|z| \leq \frac{1}{r}$ ، کدام است؟

$$e \quad (1) \quad 1 \quad (2)$$

$$\frac{r}{e^r} \quad (3) \quad e^r \quad (4)$$

۱۱- تصویر نیم صفحه سمت چپ محور موهومی تحت نگاشت  $w = \tanh z$ ، کدام است؟

$$(1) \text{ نیم صفحه سمت راست محور موهومی} \quad (2) \text{ نیم صفحه پایینی محور حقیقی}$$

$$(3) \text{ نیم صفحه بالایی محور حقیقی} \quad (4) \text{ نیم صفحه چپ محور موهومی}$$

- ۱۲- اگر  $f(z)$  یک تابع نام (در کل صفحه مختلط تحلیلی)،  $f(0) = 1$  و  $|f(z) + i - z^2| \leq 2$  برای هر  $z \in \mathbb{C}$  که در آن  $i = \sqrt{-1}$ ، آنگاه مقدار  $f(2)$  کدام است؟

(۱) صفر  $i(2)$

(۲)  $2$  (۳)  $i(4)$

- ۱۳- در بسط تیلور تابع  $f(z) = z \sin z$  حول  $z = i$ ، ضریب  $(z - i)^5$  کدام است؟

(۱)  $\frac{i}{5!}(\sinh 1 + 5 \cosh 1)$  (۲)  $\frac{i}{5!}(\cosh 1 + 5 \sinh 1)$

(۳)  $\frac{i}{5!}(\sinh 1 + \cosh 1)$  (۴)  $\frac{i}{5!}(\cosh 5 + \sinh 5)$

- ۱۴- اگر  $C$  مربع  $|x| + |y| = 4$  پیموده شده در جهت مثلثاتی باشد، آنگاه مقدار انتگرال  $\oint_C \frac{z}{1+e^z} dz$ ، کدام است؟

(۱)  $0$  (۲)  $2\pi^2$

(۳)  $4\pi^2$  (۴)  $4\pi^2 i$

- ۱۵- اگر تابع مختلط  $f(z)$  دارای سری لوران  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$  در طوق  $1 - \delta < |z| < 1 + \delta$ ،  $\delta > 0$  باشد و قرار

دهیم  $F(\theta) = f(e^{i\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\theta}$ ، آنگاه بیان  $c_n$  بر حسب  $F(\theta)$  کدام است؟

(۱)  $c_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} F(\theta) d\theta$  (۲)  $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} F(\theta) d\theta$

(۳)  $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} F(\theta) d\theta$  (۴)  $c_n = 0$

دینامیک پیشرفته:

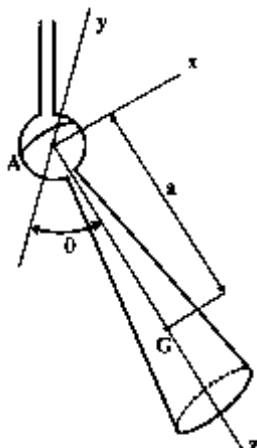
- ۱۶- فرغره مخروطی دارای جرم  $m$  و گشتاور اینرسی  $I_x = I_y = I$  و  $I_z = \frac{I}{4}$  می‌باشد. اگر فرغره آزادانه توسط اتصال کاسه - ساچمه‌ای در  $A$  با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\omega_s$  حول  $z$  بچرخد، سرعت زاویه‌ای تقدیمی آن حول محور قائم در  $\theta = 45^\circ$ ، از کدام معادله به‌دست می‌آید؟

(۱)  $\Omega^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \omega_s \Omega - \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{Mga}{I} = 0$

(۲)  $\Omega^2 + \frac{\sqrt{2}}{3} \omega_s \Omega - \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{Mga}{I} = 0$

(۳)  $\Omega + \frac{4Mga}{I\omega_s} = 0$

(۴)  $\Omega - \frac{4Mga}{I\omega_s} = 0$



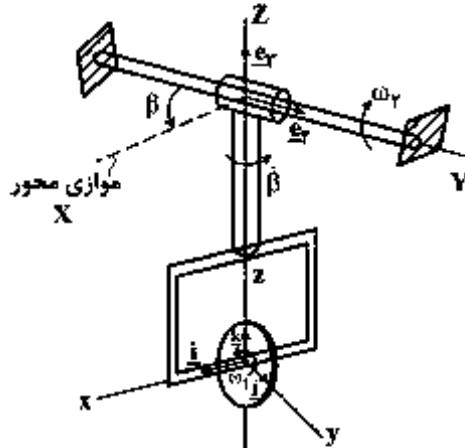
۱۷- در سیستم زیروسکوپی زیر، روابط زیر برقرار است.

$$\underline{e}_\varphi = -\cos\beta \underline{i} + \sin\beta \underline{j}$$

$$\underline{i} = \dot{\beta} \underline{j} + \omega_\varphi \sin\beta \underline{k}$$

$$\underline{e}_\varphi = -\omega_\varphi (\sin\beta \underline{i} + \cos\beta \underline{j})$$

که در آن‌ها  $\underline{i}$  و  $\underline{e}_\varphi$  مشتقات زمانی بردارهای یکه هستند. مؤلفه در امتداد  $y$  شتاب زاویه‌ای دیسک، برابر کدام است؟



$$\omega_1 \dot{\beta} + \omega_\varphi \sin\beta + \dot{\beta} \omega_\varphi \cos\beta \quad (۱)$$

$$\omega_1 \dot{\beta} - \omega_\varphi \sin\beta - \dot{\beta} \omega_\varphi \cos\beta \quad (۲)$$

$$\omega_1 \dot{\beta} - \omega_\varphi \sin\beta + \dot{\beta} \omega_\varphi \cos\beta \quad (۳)$$

$$\omega_1 \dot{\beta} + \omega_\varphi \sin\beta - \dot{\beta} \omega_\varphi \cos\beta \quad (۴)$$

۱۸- استوانه‌ای همگن به جرم  $m$  روی محوری که توسط یاتاقان‌های  $A$  و  $B$  نگهداشته می‌شود، سوار شده است. محور

تحت کوپل  $M_j$  قرار داشته و به دلیل وجود اصطکاک سرعت زاویه‌ای آن ثابت و برابر  $\dot{\omega}$  می‌باشد. مؤلفه قائم

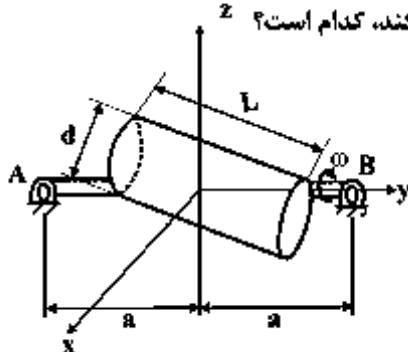
عکس‌العمل یاتاقان  $A$  در لحظه‌ای که محور استوانه از صفحه افقی عبور می‌کند، کدام است؟

$$\sqrt{r}mg \quad (۱)$$

$$\frac{mg}{r} \quad (۲)$$

$$mg \quad (۳)$$

$$\frac{mg}{r} \quad (۴)$$



۱۹- یک ذره به جرم  $m$  روی سطح خارجی یک حلقه ثابت به شعاع  $R$  در حرکت است. در چه لحظه‌ای ذره سطح را

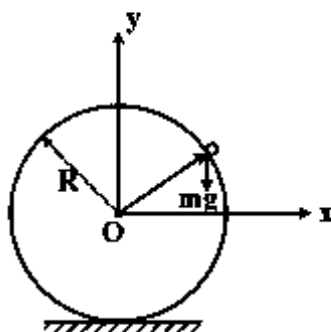
$$K = \sqrt{\frac{rg}{R}} \text{ ترک خواهد کرد؟}$$

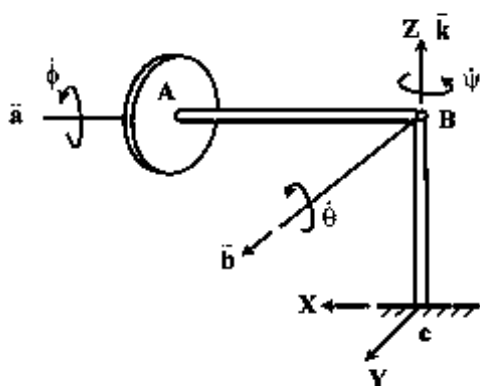
$$t = \frac{(-1 + \sin\theta)\sqrt{r(1 + \sin\theta)} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{r(1 + \sin\theta)}}{r}\right)}{k\sqrt{1 - \sin\theta}} \quad (۱)$$

$$t = \frac{(1 - \sin\theta)\sqrt{r(1 + \sin\theta)} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{r(1 + \sin\theta)}}{r}\right)}{k(1 - \sin\theta)} \quad (۲)$$

$$t = \frac{(1 - \sin\theta)\sqrt{r(1 + \sin\theta)} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{(1 + \sin\theta)/r}}{r}\right)}{k\sqrt{1 + \sin\theta}} \quad (۳)$$

$$t = \frac{(1 - \sin\theta)\sqrt{(1 + \sin\theta)} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 + \sin\theta}}{r}\right)}{k\sqrt{1 - \sin\theta}} \quad (۴)$$





۲۰- شتاب زاویه‌ای جسم AB، کدام است؟

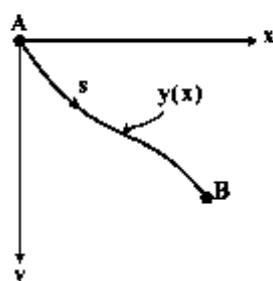
$$(1) (\ddot{\phi} + \dot{\theta}\dot{\psi})\mathbf{I} + (\ddot{\theta} + \dot{\phi}\dot{\psi})\mathbf{J} + (\ddot{\psi} + \dot{\phi}\dot{\theta})\mathbf{K}$$

$$(2) (\ddot{\psi} + \dot{\theta}\dot{\psi})\mathbf{I} + (\ddot{\phi} + \dot{\theta}\dot{\psi})\mathbf{J} + (\ddot{\psi} + \dot{\phi}\dot{\theta})\mathbf{K}$$

$$(3) (\ddot{\theta} + \dot{\phi}\dot{\psi})\mathbf{I} + (\ddot{\phi} + \dot{\theta}\dot{\psi})\mathbf{J} + (\ddot{\phi} + \dot{\phi}\dot{\theta})\mathbf{K}$$

$$(4) (\ddot{\psi} - \dot{\theta}\dot{\psi})\mathbf{I} + (\ddot{\theta} + \dot{\phi}\dot{\psi})\mathbf{J} + (\ddot{\psi} - \dot{\phi}\dot{\theta})\mathbf{K}$$

۲۱- دو نقطه A و B در یک صفحه عمودی مفروض است. مسیری از A به B که ذره‌ای به جرم m تحت نیروی گرانش، بدون اصطکاک، در کوتاه‌ترین زمان، در امتداد آن می‌لغزد، از کدام معادله به دست می‌آید؟



$$(1) y + y'^2 + yy'' = 0$$

$$(2) 1 + y' + y^2 y'' = 0$$

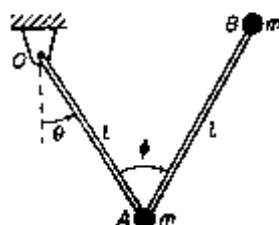
$$(3) y + y' + y'' y'' = 0$$

$$(4) 1 + y'^2 + 2yy'' = 0$$

۲۲- جرم‌های ذره‌ای A و B، هر کدام با جرم m به میله‌های بدون جرم با طول l متصل‌اند. میله‌ها در A و O لولا شده‌اند. با فرض اینکه همه حرکت در یک صفحه افقی باشد، و با فرض شرایط اولیه

$\theta(0) = \phi(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0, \dot{\phi}(0) = \omega_0$ ، رابطه بین دو سرعت زاویه‌ای  $\dot{\theta}$  و  $\dot{\phi}$  برحسب تابعی از زاویه  $\phi$ ، برابر

کدام است؟



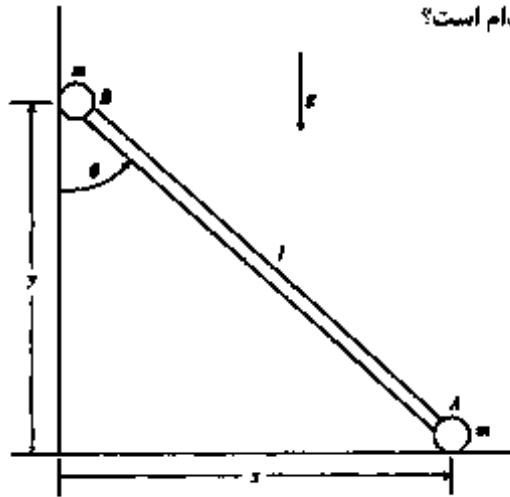
$$(1) \dot{\theta} = \left( \frac{2 - 2 \cos \phi}{1 - \cos \phi} \right) \dot{\phi}$$

$$(2) \dot{\theta} = \left( \frac{2 - \cos \phi}{2 + \cos \phi} \right) \dot{\phi}$$

$$(3) \dot{\theta} = \left( \frac{1 - \cos \phi}{2 - 2 \cos \phi} \right) \dot{\phi}$$

$$(4) \dot{\theta} = \left( \frac{2 + 2 \cos \phi}{1 + \cos \phi} \right) \dot{\phi}$$

۲۳- به هریک از دو سر میله بدون جرمی به طول  $l$  مطابق شکل زیر، جرم  $m$  متصل شده است و روی دو سطح بدون اصطکاک تکیه داده است. از این حالت رها می‌شود. در صورتی که فرض شود میله در صفحه قائم حرکت می‌کند، سرعت زاویه‌ای میله هنگامی که  $B$  به سطح افقی می‌رسد، کدام است؟



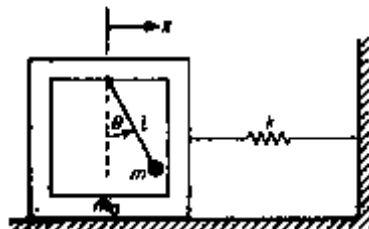
$$\frac{g}{l} \sin \theta \quad (1)$$

$$\frac{g}{l} \cos \theta \quad (2)$$

$$\frac{g}{l \cos \theta} \quad (3)$$

$$\frac{g}{l \sin \theta} \quad (4)$$

۲۴- در داخل جعبه‌ای با جرم  $m_0$  یک آونگ ساده با جرم متمرکز  $m$  و طول  $l$  نصب شده است. این جعبه به همراه یک فنر با سختی  $k$  تشکیل یک سیستم جرم فنر افقی می‌دهد که می‌تواند روی یک صفحه افقی بدون اصطکاک حرکت افقی انجام دهد. معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت  $x$ ، کدام است؟



$$(m_0 + m)\ddot{x} - \tau m l \ddot{\theta} \sin \theta + m l \dot{\theta}^2 \cos \theta + kx = 0 \quad (1)$$

$$(m_0 + m)\ddot{x} + m l \ddot{\theta} \cos \theta - m l \dot{\theta}^2 \sin \theta + kx = 0 \quad (2)$$

$$(m_0 + m)\ddot{x} + \tau m l \ddot{\theta} \cos \theta - m l \dot{\theta}^2 \sin \theta + kx = 0 \quad (3)$$

$$(m_0 + m)\ddot{x} - m l \ddot{\theta} \cos \theta + m l \dot{\theta}^2 \cos \theta + kx = 0 \quad (4)$$

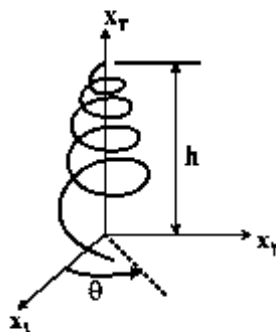
۲۵- ذره‌ای در مسیر مارپیچ دوکی شکل تحت تأثیر نیروی جاذبه به سمت پایین در حرکت است، به طوری که:

$$x_1 = a\theta \cos \theta$$

$$x_r = a\theta \sin \theta$$

$$x_r = h - a\theta$$

شتاب مماسی ذره بر حسب پارامتر  $\theta$ ، کدام است؟ ( $a$  ثابت است).



$$a_t = a\dot{\theta}^2 (\tau + \theta^2)^{\frac{1}{\tau}} + a\ddot{\theta} \theta / (\tau + \theta^2)^{\frac{1}{\tau}} \quad (1)$$

$$a_t = a\ddot{\theta} (\tau + \theta) + a\dot{\theta}^2 \theta / (\tau + \theta) \quad (2)$$

$$a_t = a\sqrt{\tau + \theta^2} \left( \ddot{\theta} + \frac{\theta \dot{\theta}^2}{\tau + \theta^2} \right) \quad (3)$$

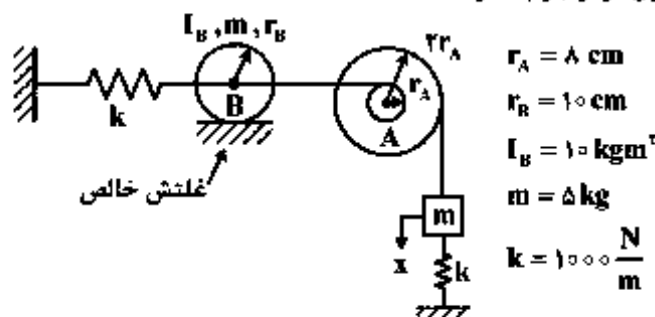
$$a_t = a\theta \left( \ddot{\theta} + \frac{\theta \dot{\theta}^2}{\tau + \theta^2} \right) \quad (4)$$



## ارتعاشات پیشرفته:

۲۶- در سیستم زیر موقعیت  $x$  از تعادل استاتیکی جرم  $m$  اندازه‌گیری شده و از اصطکاک در قوفه  $A$  و جرم آن صرف‌نظر می‌شود. استوانه  $B$  بر روی سطح غلتش بدون لغزش می‌کند. با توجه به مقادیر عددی داده شده،

فرکانس طبیعی سیستم چند  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$  است؟ ( $I_B$  حول مرکز جرم استوانه است.)



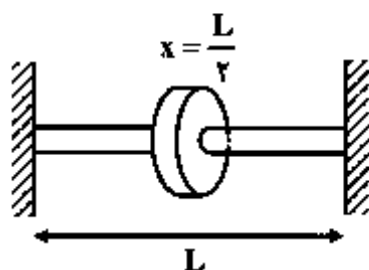
$$(1) \quad 2/2086$$

$$(2) \quad 2/2140$$

$$(3) \quad 4/8780$$

$$(4) \quad 14/1421$$

۲۷- معادله فرکانسی ارتعاشات پیچشی سیستم زیر شامل یک شفت با دو سرگیردار و حامل یک دیسک در مرکز آن، کدام است؟ ( $J$  معان اینرسی قطبی سطح مقطع شفت،  $J_c$  معان اینرسی دیسک و  $c$  ثابت موج است.)



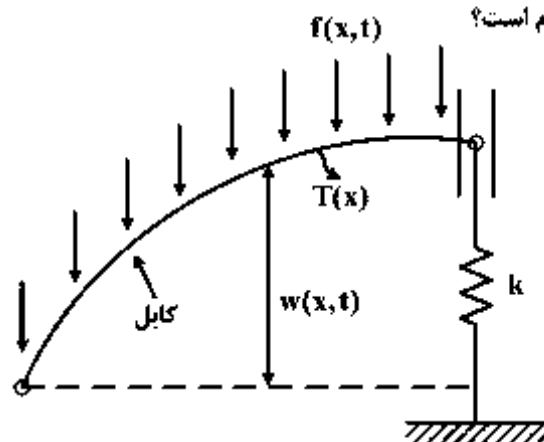
$$(1) \quad \sin \frac{\omega L}{\gamma c} = \frac{GJL}{J_c c^2}$$

$$(2) \quad \tan \frac{\omega L}{\gamma c} = \frac{\gamma c}{\omega L} \frac{GJL}{J_c c^2}$$

$$(3) \quad \cos \frac{\omega L}{\gamma c} = \frac{GJL}{J_c c^2}$$

$$(4) \quad \tan \frac{\omega L}{c} = \frac{c}{\omega L} \frac{GJL}{J_c c^2}$$

۲۸- معادله ارتعاشی کابل تحت بارگذاری گسترده  $f(x, t)$ ، کدام است؟



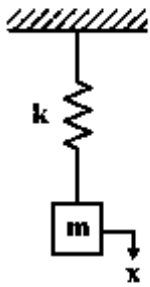
$$(1) \quad -\frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + f = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$(2) \quad -T(x) \frac{\partial w}{\partial x} + f = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + f = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] - f = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

- ۲۹- معادله ارتعاشات سیستم روبه‌رو، حول وضعیت تعادل استاتیکی با فرض آنکه نیروی فنر با مجذور جابه‌جایی در سختی فنر ( $k$ ) برابر باشد، کدام است؟



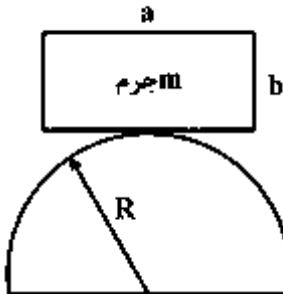
$$m\ddot{x} + kx^2 + \sqrt{kmg}x = 0 \quad (1)$$

$$m\ddot{x} + kx^2 + \sqrt{mgk}x = 0 \quad (2)$$

$$m\ddot{x} + kx^2 + mg = 0 \quad (3)$$

$$m\ddot{x} + kx^2 = 0 \quad (4)$$

- ۳۰- بلوک مستطیلی شکل به ابعاد  $a$  و  $b$  با چگالی یکسان بر روی یک سطح نیم‌دایره به شعاع  $R$  نوسان می‌کند. با فرض آن‌که هیچ‌گونه لغزش صورت نمی‌گیرد و وضعیت ارتعاشات در حالت ماناست. انرژی جنبشی بلوک به‌صورت تابعی از پارامترهای ارائه شده و زاویه بلوک با افق  $\theta$ ، کدام است؟



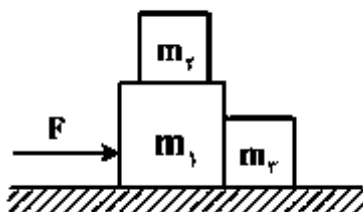
$$\frac{1}{2}m \left[ R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{a^2 + b^2}{12} \right] \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{24}m(a^2 + b^2) \dot{\theta}^2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}m \left( \frac{b^2}{4} + R^2 \dot{\theta}^2 \right) \dot{\theta}^2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}m \left[ \frac{b^2}{3} + R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{12}a^2 \right] \dot{\theta}^2 \quad (4)$$

- ۳۱- سه بلوک مطابق شکل زیر، قرار گرفته‌اند. نیروی  $F$  به یکی از آن‌ها وارد می‌شود. چنانچه ضریب اصطکاک بین هر دو سطح  $\mu$  باشد، حداکثر مقدار نیروی  $F$  بدون آنکه بلوک  $m_2$  بر روی بلوک  $m_1$  بلغزد، کدام است؟



$$2\mu g(m_1 + m_2 - m_3) \quad (1)$$

$$3\mu g(m_1 + m_2 + m_3) \quad (2)$$

$$2\mu g(m_1 + m_2 + m_3) \quad (3)$$

$$\mu g(m_1 + m_2 + m_3) \quad (4)$$

- ۳۲- روش‌های استخراج معادلات حرکت اجسام صلب، کدام است؟

(۱) دالامبر، هیلز، اصل همیلتون، گیبس - اپل

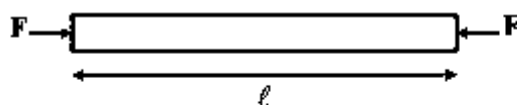
(۲) کینز، دالامبر، اصل همیلتون، گیبس - اپل

(۳) هیلز، اصل همیلتون، کپلر، دالامبر

(۴) کینز، دالامبر، اصل همیلتون، کپلر

۳۳- میله‌ای به طول  $l$  در ابتدا تحت نیروهای مساوی  $F$  در هر دو انتها فشرده می‌شود. اگر نیروهای فشاری یک مرتبه حذف شوند. پاسخ ارتعاشات طولی میله کدام است؟

( $c$  ثابت موج) (فشرده‌گی واحد  $\delta$  در  $t = 0$ ، به صورت  $u_{t=0} = \frac{\delta l}{\gamma} - \delta x$  است.)



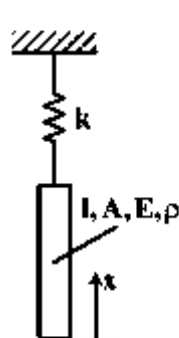
$$\frac{4\delta l}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \quad (1)$$

$$\frac{\lambda \delta l}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\lambda \delta l}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \quad (3)$$

$$\frac{4\delta l}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \quad (4)$$

۳۴- برای ارتعاش طولی محور الاستیک که جنس و مقطع آن  $(A, \rho, E)$  ثابت است. معادله فرکانسی کدام است؟



$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

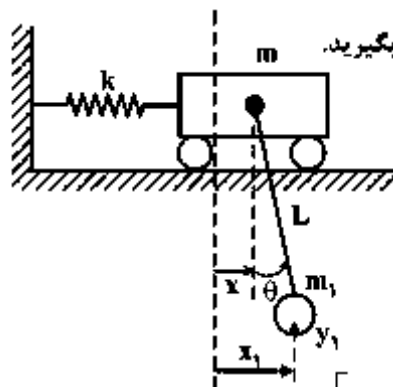
$$\sin \frac{\omega l}{c} = \frac{kc}{E\omega A} \quad (1)$$

$$\cos \frac{\omega l}{c} = \frac{kc}{E\omega A} \quad (2)$$

$$\tan \frac{\omega l}{c} = \frac{kc}{E\omega A} \quad (3)$$

$$\cot \frac{\omega l}{c} = \frac{kc}{E\omega A} \quad (4)$$

۳۵- معادلات حرکت سیستم زیر، کدام است؟ دامنه ارتعاشات را کوچک در نظر بگیرید.



$$\begin{bmatrix} m + m_1 & m_1 L \\ m_1 L & (m + m_1) L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m_1 g L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

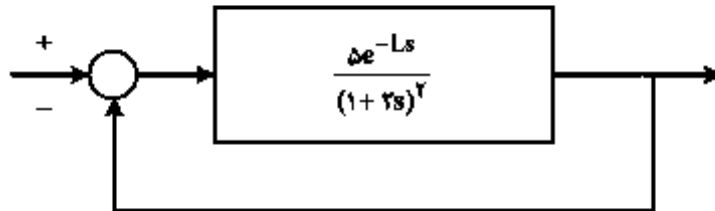
$$\begin{bmatrix} m & (m + m_1) L \\ (m + m_1) L & m_1 L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & (m + m_1) g L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} m & m_1 L \\ m_1 L & m_1 L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m_1 g L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} m + m_1 & m_1 L \\ m_1 L & m_1 L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m_1 g L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

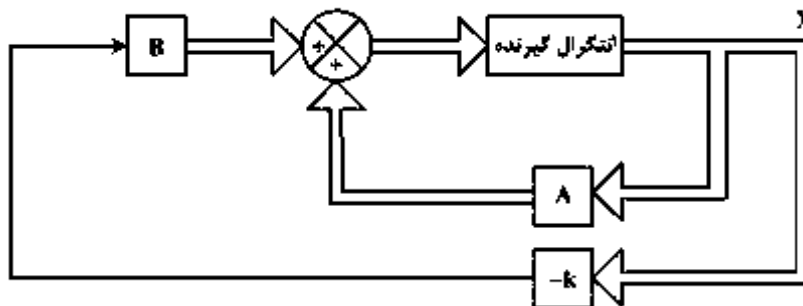
کنترل پیشرفته:

۳۶- در سیستم مدار بسته شکل زیر، سیستم اصلی مرتبه ۲ با تأخیر خالص  $L$  ثانیه است. مقدار زمان تأخیر  $L$  چند ثانیه باشد، تا حد فاز در این سیستم مدار بسته مساوی  $45^\circ$  شود؟



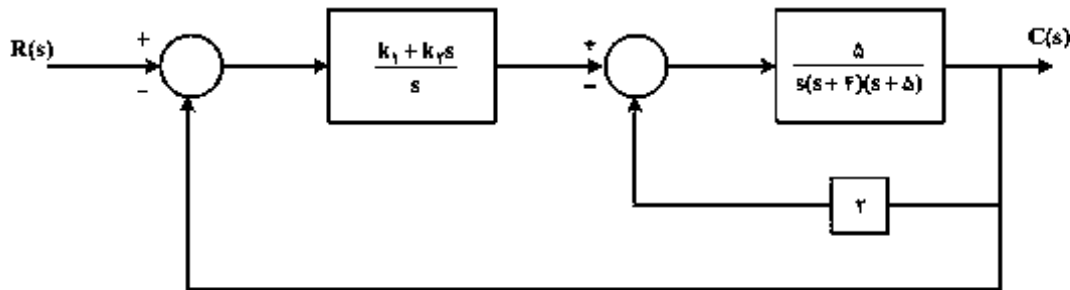
- (۱) ۰٫۱۴۲  
(۲) ۱٫۶۶  
(۳) ۲٫۳۱  
(۴) ۳٫۲۴

۳۷- با توجه به نمودار بلوکی زیر، اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  باشد، ماتریس بهره  $k$  چقدر باشد، تا قطب‌های دگولاتور در  $s_{1,2} = -1 \pm j$  قرار گیرند؟



- (۱)  $\begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}$   
(۲)  $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$   
(۳)  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$   
(۴)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$

۳۸- دیاگرام جعبه‌ای یک سیستم کنترل فیدبک در شکل زیر نمایش داده شده است. معادلات حالت این سیستم در فرم مشاهده‌پذیر (OCF)، کدام است؟



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & -10 - \Delta k_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta k_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), c(t) = [\Delta k_1 \quad \Delta k_2 \quad 0 \quad 0] x \quad (1)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\Delta k_1 & -10 - \Delta k_2 & -20 & -9 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), c(t) = [\Delta k_1 \quad \Delta k_2 \quad 0 \quad 0] x \quad (2)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\Delta k_1 & 1 & 0 & 0 \\ -10 - \Delta k_2 & 0 & 1 & 0 \\ -20 & 0 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), c(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] x \quad (3)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 0 & 0 \\ -20 & 0 & 1 & 0 \\ -10 - \Delta k_2 & 0 & 0 & 1 \\ -\Delta k_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta k_2 \\ \Delta k_1 \end{bmatrix} u(t), c(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] x \quad (4)$$

۳۹- در سیستم کنترل زیر:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

تابع تبدیل سیستم کدام است و سیستم، کنترل پذیر و شهودپذیر هست یا نه؟

$$(1) \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}, \text{ شهودپذیر و کنترل پذیر}$$

$$(2) \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}, \text{ شهودپذیر و غیر کنترل پذیر}$$

$$(3) \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}, \text{ غیر شهودپذیر و غیر کنترل پذیر}$$

$$(4) \quad G(s) = \frac{1}{s+1}, \text{ غیر شهودپذیر و غیر کنترل پذیر}$$

۴۰- یک سیستم خطی درجه دو LTI با شرایط اولیه داده شده است و پاسخ سیستم به پله واحد به صورت زیر است:

$$y(t) = 0.5 - e^{-t} + 2e^{-2t} \quad t \geq 0$$

پاسخ سیستم مشابه فوق، با شرایط اولیه یکسان نسبت به ورودی  $2u_{-1}(t)$  (پله با دامنه ۲) به صورت زیر است:

$$y(t) = 1 - 1.5e^{-t} + 0.5e^{-2t}$$

پاسخ حالت صفر (Zero state) به ورودی پله و تابع تبدیل سیستم کدام است؟

$$(1) \quad y_{zs}(s) = \frac{5}{s} + \frac{2}{s^2+1}, \quad H(s) = \frac{5s^2+5+2s}{s(s^2+1)}$$

$$(2) \quad y_{zs}(s) = \frac{0.5}{s} - \frac{0.5}{s+1} - \frac{1.5}{s+2}, \quad H(s) = \frac{-1.5s^2 - 0.5s + 1}{(s+1)(s+2)}$$

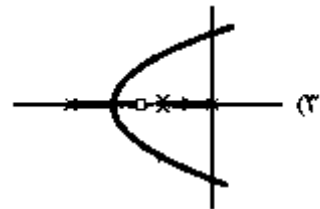
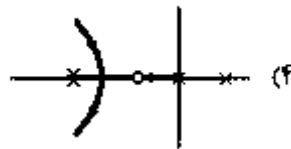
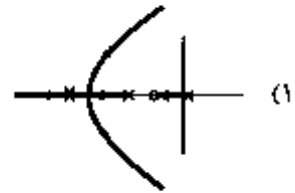
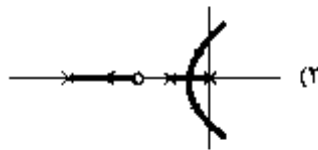
$$(3) \quad y_{zs}(s) = \frac{0.5}{s+1} - \frac{1}{s+2} + 5, \quad H(s) = \frac{s^2+2s^2+5}{(s+1)(s+2)}$$

$$(4) \quad y_{zs}(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{0.5}{s+2}, \quad H(s) = \frac{s^2+s^2+s}{(s+1)(s+2)}$$

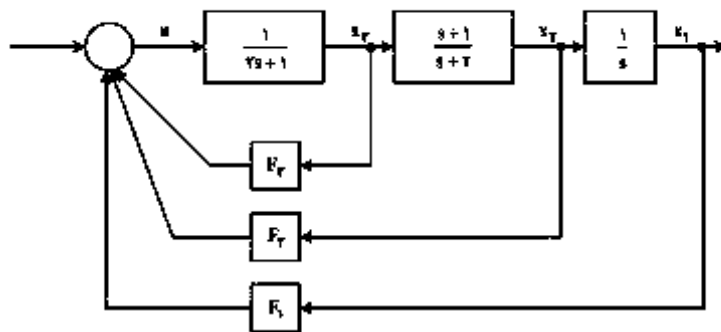
۴۱- یک سیستم مدار - بسته دارای معادله مشخصه زیر است:

$$1 + kG(s) = 1 + \frac{k(s+1)}{s(s+2)(s+4)^2} = 0$$

دیاگرام مکان ریشه‌های آن، کدام است؟



۴۲- برای تقریر قطب‌های مدار - بسته سیستم زیر در نقاط  $-1 \pm j\sqrt{3}$  انتخاب مناسب  $F_i$ ،  $i=1, 2, 3$  کدام است؟



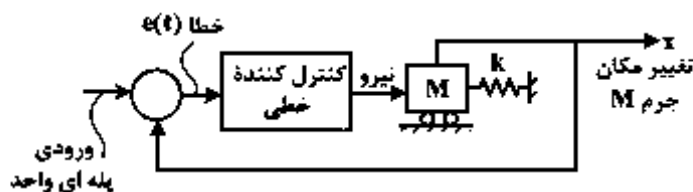
$$F = [-10, -15, -5] \quad (۱)$$

$$F = [-20, -1, -1] \quad (۲)$$

$$F = [1, 20, 5] \quad (۳)$$

$$F = [1, -10, -5] \quad (۴)$$

۴۳- در سیستم جرم و فنر زیر جرم روی سطح افقی بدون اصطکاک جابه‌جا می‌شود. هدف کنترل پاسخ  $y = x(t)$  است که  $x$  تغییر مکان جرم  $M$  است. مقادیر  $M$  و  $k$  به ترتیب  $1 \text{ kg}$  و  $\frac{4}{m} \text{ N}$  است. یکی از انواع کنترل کننده‌های خطی زیر را طوری انتخاب کنید که نسبت استهلاک سیستم مدار بسته  $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$  و حداکثر خطای حالت ماندگار به ازای ورودی مینای پله‌ای واحد مساوی  $0.1$  شود.



| نام کنترل کننده | $G_c(s)$                        |
|-----------------|---------------------------------|
| P-action:       | $k_c$                           |
| PI-action       | $k_c + k_1 \frac{1}{s}$         |
| PD-action       | $k_c + k_D s$                   |
| PID-action      | $k_c + k_1 \frac{1}{s} + k_D s$ |

(۱) کنترل کننده PID با ضرایب  $k_c = 12$  ،  $k_1 = 6/2$  ،  $k_D = 25$

(۲) کنترل کننده PI با ضرایب  $k_c = 24$  ،  $k_1 = 9/4$

(۳) کنترل کننده PD با ضرایب  $k_c = 26$  ،  $k_D = 8/8$

(۴) کنترل کننده P با ضریب  $k_c = 6$

۴۴- برای سیستم دینامیکی خطی نامتغیر با زمان، رابطه  $\dot{x} = Ax$  برقرار است که در آن  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$  می‌باشد.

پاسخ این سیستم به ازای شرایط اولیه  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  به صورت  $y(t) = 2e^{-\delta t}$  در آمده است. آیا می‌توان در مورد

مشاهده‌پذیری این سیستم اظهار نظر نمود، چرا و با چه استدلالی؟ (توجه شود که خروجی اسکالر است و  $C$  ماتریس سطری  $1 \times 2$  است.)

(۱) بله می‌توان اظهار نظر نمود و سیستم مشاهده‌پذیر نیست زیرا همه مقادیر ویژه در پاسخ ظاهر نشده‌اند.

(۲) بله می‌توان اظهار نظر نمود و سیستم مشاهده‌پذیر است زیرا بردارهای ویژه ماتریس  $A$  برهم عمود نیستند.

(۳) خیر نمی‌توان اظهار نظر نمود زیرا شرایط اولیه در امتداد هیچ کدام از بردارهای ویژه ماتریس  $A$  نیست.

(۴) خیر نمی‌توان اظهار نظر کرد زیرا ماتریس سطری  $C$  داده نشده است.

۴۵- در تحلیل رفتار سیستم‌های دینامیکی خطی بدون ورودی به صورت  $\dot{x} = Ax$  و  $x(0) = x_0$  که در آن  $x$  بردار

ستونی با  $n$  جزء و  $A$  ماتریس مربع  $n \times n$  است. حل سیستم به صورت  $x(t) = e^{At} x_0$  داده شده است. ( $A$

ماتریس مربع با درایه‌های حقیقی و نامتغیر با زمان است.) در مورد صحت رابطه  $e^{(A_1 + A_2)t} = e^{A_1 t} \cdot e^{A_2 t}$

کدام پاسخ صحیح است؟ ( $A_1$  و  $A_2$  هم بعد هستند.)

(۱) فقط وقتی صحیح است که  $A_1$  و  $A_2$  قطری باشند. (۲) فقط وقتی صحیح است که  $A_1 A_2 = A_2 A_1$  باشد.

(۳) در هیچ شرایطی صحیح نیست. (۴) همواره صحیح است.