

269

F

نام:

نام خانوادگی:

محل امضا:

بانک مقالات ایران  
مرکز دانش و مقالات  
علمی و پژوهشی و  
سئوالات آزمونها

www.edub.ir



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»

امام خمینی (ره)

صبح جمعه  
۱۳۹۵/۱۲/۶  
دفترچه شماره (۱)

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

**آزمون ورودی**  
**دوره دکتری (نیمه‌متمرکز) داخل - سال ۱۳۹۶**

**رشته امتحانی ریاضی محض (کد ۲۲۳۳)**

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی - مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی - مبانی جبر - جبر پیشرفته - آنالیز حقیقی)	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

اسفندماه - سال ۱۳۹۵

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

## مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی:

۱- اگر  $a, b > 1$ ، مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{\sqrt[n]{a} - 1}{b})^n$  کدام است؟

(۱)  $a^{\frac{1}{b}}$

(۲)  $\frac{a}{b}$

(۳)  $e^{a-b}$

(۴) ۱

۲- فرض کنید  $f: S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی اکیداً یکنوا باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱) باز یا بسته یا همبند بودن  $f(S)$ ، پیوستگی  $f$  را نتیجه می‌دهد.

(۲) باز یا بسته بودن  $f(S)$  پیوستگی  $f$  را نتیجه می‌دهد ولی همبند بودن  $f(S)$  پیوستگی  $f$  را نتیجه نمی‌دهد.

(۳) همبند یا بسته بودن  $f(S)$  پیوستگی  $f$  را نتیجه می‌دهد ولی باز بودن  $f(S)$  پیوستگی  $f$  را نتیجه نمی‌دهد.

(۴) باز یا همبند بودن  $f(S)$  پیوستگی  $f$  را نتیجه می‌دهد ولی بسته بودن  $f(S)$  پیوستگی  $f$  را نتیجه نمی‌دهد.

۳- اگر تابع  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته یکنواخت باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  هر دو موجود هستند.

(۲)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  لزوماً موجود نیستند.

(۳)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  موجود است ولی  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  لزوماً موجود نیست.

(۴)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  موجود است ولی  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  لزوماً موجود نیست.

۴- اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{2}{\pi} & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$  بر  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) تابع  $f$  دارای تابع اولیه است.

(۲) تابع  $f$  در هیچ نقطه از  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$  پیوسته نیست.

(۳) انتگرال بالایی تابع  $f$  برابر یک است.

(۴) تابع  $f$  در خاصیت مقدار میانی صدق نمی‌کند.

۵- فرض کنیم  $(X, d)$  یک فضای متریک است. متریک  $\rho$  را روی  $X$  به صورت  $\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$  تعریف

می‌کنیم. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) مترهای  $\rho$  و  $d$  معادل هستند.

(۲)  $E \subseteq X$  نسبت به متر  $\rho$  همبند است اگر و تنها اگر نسبت به متر  $d$  همبند باشد.

(۳)  $E \subseteq X$  نسبت به متر  $\rho$  فشرده است اگر و تنها اگر نسبت به متر  $d$  فشرده باشد.

(۴) به ازای هر فضای متریک  $Y$ ، تابع  $f: X \rightarrow Y$  نسبت به متر  $\rho$  پیوسته است اگر و تنها اگر نسبت به متر  $d$  پیوسته باشد.

۶- اگر  $C[a, b]$  فضای توابع پیوسته حقیقی مقدار روی  $[a, b]$ ،  $\{x_n\}$  دنباله‌ای از اعداد حقیقی در  $[a, b]$  و  $\psi_n$  بر  $C[a, b]$  به صورت  $\psi_n(f) = f(x_n)$  تعریف شود، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه  $\{\psi_n\}$  به طور یکنواخت همگرا باشد کدام است؟

(۱)  $\{x_n\}$  همگرا باشد.

(۲)  $\{x_n\}$  کراندار باشد.

(۳)  $\{x_n\}$  از مرحله‌ای به بعد ثابت باشد.

(۴)  $\{x_n\}$  زیر دنباله‌ای همگرا داشته باشد.

۷- فرض کنید  $\{x_n\}$  دنباله‌ای از اعداد حقیقی و همگرا به صفر باشد.  $X = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid \text{مجهز به متر}$   
 $d((a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$  باشد و  $E = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0\}$ . کدام گزینه درست است؟

(۱)  $E$  همبند نیست.

(۲)  $E^\circ = \emptyset$ .

(۳)  $E' \neq E$ .

(۴)  $E$  بسته نیست.

۸- کدام گزینه شرط لازم و کافی برای فشردگی فضای متریک  $X$  نیست؟

(۱) هر تابع پیوسته حقیقی مقدار بر  $X$  اکسترمم‌های مطلق خود را اختیار می‌کند.

(۲) هر تابع پیوسته از  $X$  به یک فضای متریک  $Y$  پیوسته بکنواخت است.

(۳) هر تابع پیوسته از  $X$  به یک فضای متریک  $Y$  مجموعه‌های بسته را به مجموعه بسته می‌نگارد.

(۴) هر تابع پیوسته از  $X$  به یک فضای متریک  $Y$  کران‌دار است.

۹- برای هر  $n \in \mathbb{N}$  تابع  $f_n(x) = n(\sin(x + \frac{1}{n}) - \sin x)$  را بر  $\mathbb{R}$  در نظر می‌گیریم. در این صورت دنباله توابع  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  بر  $\mathbb{R}$  ...

(۱) به طور نقطه‌وار به تابع ثابت صفر همگرا است ولی نه به طور یکنواخت.

(۲) به طور نقطه‌وار به تابع  $\cos x$  همگرا است ولی نه به طور یکنواخت.

(۳) به طور یکنواخت به تابع ثابت صفر همگرا است.

(۴) به طور یکنواخت به تابع  $\cos x$  همگرا است.

میانی ماتریس‌ها و جبر خطی - میانی جبر:

۱۰- فرض کنید  $G = S_5$  و  $H = \{e, (۱۲), (۱۶), (۳۶), (۱۳۶), (۱۶۳)\}$ . قرار می‌دهیم  $T = \langle H \rangle$ . تعداد عناصر مرتبه ۲ در  $T$  برابر است با:

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

۱۱- فرض کنید  $G, H, K$  و  $N$  زیر گروه‌هایی از یک گروه باشند. کدام مورد درست است؟

(۱) اگر  $G' \times G' = H' \times H'$  که  $G'$  و  $H'$  زیر گروه‌های مشتق هستند، آنگاه  $G = H$ .

(۲) اگر گروه‌های فوق همگی آبلی باشند و  $N < H$  و  $K < G$  و  $K = N$  و  $G = H$ ، آنگاه  $\frac{G}{K} = \frac{H}{N}$ .

(۳) اگر  $G \times H = G \times K$ ، آنگاه  $H = K$ .

(۴) اگر گروه‌های فوق آبلی بوده و  $G \cap N = G \cap K$ ، آنگاه  $\frac{G+N}{N} = \frac{G+K}{K}$ .

۱۲- فرض کنید  $G$  یک گروه است و  $g \in G$ . در این صورت نگاشت  $I_g: G \rightarrow G$  که  $I_g(x) = gxg^{-1}$  را خودریختی داخلی نظیر  $g$  می‌نامیم. فرض کنید  $a$  و  $b$  دو عضو گروه  $G$  باشند که خودریختی‌های داخلی نظیر آن‌ها با یکدیگر برابرند. در این صورت کدام یک درست است؟

$$(۱) a = b$$

$$(۲) ab = ba$$

$$(۳) b = a^{-1}$$

$$(۴) ab \in Z(G)$$

۱۳- در گروه تقارن‌های یک  $n$  ضلعی منتظم که با  $D_n$  نمایش داده می‌شود، اگر  $R$  یک دوران و  $T$  یک انعکاس باشد، که  $RT = TR$ ، در این صورت کدام گزینه درست است؟

(۱)  $T$  در مرکز گروه قرار دارد.

(۲)  $R$  فقط می‌تواند دوران  $360^\circ$  باشد.

(۳)  $R$  در مرکز گروه قرار دارد.

(۴)  $T$  با هیچ انعکاسی غیر از خودش جابجا نمی‌شود.

۱۴- فرض کنید  $K$  یک میدان شامل  $Q$  بوده و  $[K:Q] = n$ . اگر  $\phi: K \rightarrow M_n(Q)$  یک تکریختی (منومورفیزم) حلقه‌ای باشد،  $n$  چه اعدادی می‌تواند باشد؟

$$(۱) ۱$$

$$(۲) ۱, ۲$$

$$(۳) ۱, ۲, ۴$$

(۴) نامتناهی حالت برای  $n$  وجود دارد.

۱۵- کدام مورد صحیح است؟

(۱) هر ایده‌آل ماکسیمال در حلقه  $R$ ، اول است.

(۲) هر ایده‌آل سره در حلقه  $R$  در یک ایده‌آل ماکسیمال قرار دارد.

(۳) هر ایده‌آل اول ناصفر ماکسیمال است.

(۴) اگر حلقه  $R$  یک‌دار و متناهی باشد، آنگاه تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال و تعداد ایده‌آل‌های اول  $R$  برابر است.

۱۶- فرض کنیم  $A$  یک ماتریس  $4 \times 5$  و  $B$  یک ماتریس  $5 \times 4$  با درایه‌های از میدان  $F$  باشند. به علاوه فرض کنیم رتبه

$A$  برابر ۴ و رتبه  $B$  برابر ۳ باشند. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) نه  $AB$  وارون‌پذیر است و نه  $BA$ .

(۲) هم  $AB$  وارون‌پذیر است و هم  $BA$ .

(۳)  $BA$  وارون‌پذیر است ولی  $AB$  لزوماً وارون‌پذیر نیست.

(۴)  $AB$  وارون‌پذیر است ولی  $BA$  لزوماً وارون‌پذیر نیست.

۱۷- ماتریس  $A \in M_F(R)$  در رابطه  $A^T + 2A + 3I = 0$  صدق می‌کند.  $\text{Tr}(A)$  کدام یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند باشد؟

(۱) -۱

(۲) -۳

(۳) -۵

(۴) -۷

۱۸- ماتریس  $A \in M_\Delta(R)$  در رابطه  $A^T - 4A - I = 0$  صدق می‌کند. اگر  $a_1, a_2, \dots, a_5$  مقدار ویژه‌های  $A$  باشند،

مقدار  $(a_1 - \frac{1}{a_1}) + (a_2 - \frac{1}{a_2}) + \dots + (a_5 - \frac{1}{a_5})$  کدام است؟

(۱) ۴

(۲) -۲۰

(۳) ۲۰

(۴) -۴

۱۹- ماتریس  $A$  یک ماتریس  $1395 \times 1395$  است که اعضای روی قطر اصلی آن صفر و بقیه اعضا برابر با یک هستند.

این ماتریس روی میدان چند عضوی وارون پذیر است؟

(۱) ۴

(۲) ۹

(۳) ۱۷

(۴) ۴۱

۲۰- فرض کنید  $A, B \in M_{10}(\mathbb{R})$  و هر دو دارای مقدار ویژه ۲ با تکرار ۷ باشند. اگر  $A$  و  $B$  قطری شدنی باشند، در

این صورت رتبه ماتریس  $A - B$  حداکثر چه می تواند باشد؟

(۱) ۹

(۲) ۸

(۳) ۷

(۴) ۶

۲۱- فرض کنید  $A \in M_{5 \times 7}(\mathbb{R})$  و  $\text{rank}(A) = 3$ ،  $B \in M_{7 \times 4}(\mathbb{R})$  و  $\text{rank}(B) = 2$ . در این صورت:

$\dim(\{X \in M_{7 \times 7}(\mathbb{R}) \mid AXB = 0\})$  برابر است با:

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۸

جبر پیشرفته:

۲۲- اشتراک همه ایده آل های اول حلقه  $\frac{\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$  برابر است با:

(۱)  $\frac{10\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$

(۲)  $\frac{15\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$

(۳)  $\frac{20\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$

(۴)  $\frac{60\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$

۲۳ -  $\mathbb{Z}$  - مدول  $(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q})$  با کدام یک از  $\mathbb{Z}$  - مدول‌های زیر یکرخت است؟

(۱)  $\mathbb{Q}$

(۲)  $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$

(۳)  $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$

(۴)  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$

۲۴ -  $R$  حلقه جابه‌جایی و یک‌دار و  $M$  و  $N$  دو  $R$  - مدول یکنانی دوری فرض می‌شوند. اگر  $\text{Ann}(M) = \text{Ann}(N)$  ،

کدام یک از موارد زیر درست است؟

(۱)  $\text{Ann}(M \oplus N) \subsetneq \text{Ann}(M)$

(۲)  $M = N$

(۳)  $\text{Ann}(M) \subsetneq \text{Ann}(M \oplus N)$

(۴)  $M \cong N$

۲۵ - فرض کنید  $p$  یک عدد اول باشد. در این صورت تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه

$$Q_p = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, (p, n) = 1 \right\}$$

برابر است با:

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۲۶ - فرض کنید  $R = \mathbb{R}[x]$  حلقه سری‌های توانی صوری روی میدان اعداد حقیقی  $\mathbb{R}$  باشد. در این صورت کدام

یک از موارد زیر صحیح است؟

(۱)  $\mathbb{R}$  آرئینی است.

(۲)  $\mathbb{R}$  تنها یک ایده‌آل ماکسیمال دارد.

(۳) هر ایده‌آل اول  $\mathbb{R}$  ماکسیمال است.

(۴)  $\mathbb{R}$  دارای عنصر پوچتوان ناصفر است.

۲۷- اگر  $R$  حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار باشد به گونه‌ای که برای ایده‌آل  $I$  یک  $R$ -زیر مدول از  $R[x]$  مانند  $K$  موجود

باشد که  $R[x] = I[x] \oplus K$ . آنگاه:

(۱)  $I[x]$  پروژکتیو و آزاد است.

(۲)  $I[x]$  نه پروژکتیو است و نه آزاد.

(۳)  $I[x]$  آزاد است ولی لزوماً پروژکتیو نیست.

(۴)  $I[x]$  پروژکتیو است ولی لزوماً آزاد نیست.

۲۸- فرض کنید  $R$  حلقه توابع پیوسته از  $\mathbb{R}$  به  $\mathbb{R}$  با مجموع و حاصلضرب توابع باشد. در این صورت کدام گزینه

صحیح است؟

(۱)  $R$  یک حلقه تقسیم است.

(۲)  $R$  نوتری نیست.

(۳) حوزه صحیح است.

(۴) هر ایده‌آل اول  $R$  بانولید متناهی است.

۲۹- فرض کنید  $G$  یک گروه بوده و  $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow G$  یک بروربختی (ایزومورفیسم) و  $g: \mathbb{Z}^n \rightarrow G$  یک تکریختی

(منومورفیسم) باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (توجه کنید  $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_n$  بار)

(۱)  $G = \mathbb{Z}^n$ .

(۲)  $G$  می‌تواند گروهی ناآبلی باشد.

(۳)  $G$  دارای عنصر غیربدیهی از مرتبه متناهی است.

(۴)  $G = \mathbb{Z}^2 \times H$  که  $H$  گروهی متناهی از مرتبه حداقل ۲ است.

۳۰- فرض کنید  $R = \mathbb{Q}[x, y, z]$  و  $M = \frac{R}{I}$  که در آن  $I = \langle x+z, y^2z \rangle$ . چنانچه  $f: M \rightarrow M$  یک هم‌ریختی

$R$ -مدولی پوشا باشد کدام گزینه صحیح است؟

(۱)  $\text{Ker} f^2 \neq \text{Ker} f$

(۲) زیر مدول ماکسیمال و ناصفر  $N$  موجود است که  $\text{Ker} f = N$ .

(۳)  $\text{Ker} f = 0$ .

(۴) زیر مدول مینیمال و ناصفر  $N$  موجود است که  $\text{Ker} f = N$ .

۳۱- فرض کنید  $R$  یک حوزه ایده‌آل اصلی باشد که میدان نیست و  $M$  یک  $R$ -مدول باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر

نادرست است؟

(۱)  $M$  تصویری است اگر و تنها اگر  $M$  آزاد باشد.

(۲) اگر  $M$  با تولید متناهی باشد، آنگاه طول  $M$  متناهی است.

(۳) تزریقی است اگر و تنها اگر  $M$  بخش‌پذیر باشد.

(۴) اگر  $M$  هم تصویری و هم تزریقی باشد، آنگاه  $M = 0$ .

۳۲- فرض کنیم  $R$  یک حلقه جابه‌جایی و یک‌دار و  $I$  یک ایده‌آل آن باشد به طوری که  $\frac{R}{I}$  یک  $R$ -مدول تصویری

است. در این صورت:

(۱)  $I$  یک ایده‌آل اصلی و اول است.

(۲)  $I$  یک ایده‌آل اصلی و پوچتوان است.

(۳)  $I$  یک ایده‌آل خودتوان و اول است.

(۴)  $I$  یک ایده‌آل اصلی و خودتوان است.

۳۳- فرض کنیم  $R$  یک حلقه یک‌دار و جابه‌جایی و  $M$  و  $N$  دو  $R$ -مدول باشند به طوری که  $M \otimes_R N$  آزاد ناصفر

است. در این صورت  $M \oplus N$  یک  $R$ -مدول .....

(۱) آزاد است.

(۲) نونری است.

(۳) تصویری است.

(۴) بخش‌پذیر است.

آنالیز حقیقی:

۳۴- فرض کنید  $m$  اندازه لیگ روی  $\mathbb{R}$ ،  $m^*$  اندازه خارجی متناظر با  $m$  و  $A$  و  $B$  دو مجموعه در  $\mathbb{R}$  باشند به طوری که  $B$  لیگ اندازه پذیر است،  $B \subseteq A$  و  $m(B) = m^*(A)$ . در این صورت کدام گزینه درست است؟

$$(1) \quad m^*(A \setminus B) = 0$$

(۲) مجموعه  $A$ ، لیگ اندازه پذیر است.

(۳) مجموعه  $A \setminus B$ ، لیگ اندازه پذیر است.

(۴) اگر  $m^*(A) < \infty$  آنگاه مجموعه  $A$  لیگ اندازه پذیر است.

۳۵- فرض کنید  $E$  یا  $E^c = [0, 2] \setminus E$  حداکثر شمارا باشد  $A = \{E \subseteq [0, 2]\}$  و تابع  $\mu$  بر  $A$  با ضابطه

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{حداکثر شمارا باشد } E \\ 2 & \text{حداکثر شمارا باشد } E^c \end{cases}$$

طوری که  $E_i^c$  حداکثر شمارا باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

$$(1) \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 0$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = 0$$

$$(3) \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 2$$

$$(4) \quad \sum_{i=2}^{\infty} \mu(E_i) = 2$$

۳۶- اگر  $\{E_n\}$  دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه پذیر در فضای اندازه  $(X, \Sigma, \mu)$  باشد در چه صورت تساوی زیر برقرار است؟

$$\liminf \mu^*(E_n) = \mu^*(\liminf E_n)$$

(۱) دنباله  $\{\mu^*(E_n)\}_{n=1}^{\infty}$  در  $[0, \infty]$  همگرا باشد.

(۲) دنباله‌ای صعودی باشد.

(۳) دنباله‌ای نزولی باشد.

$$(4) \quad \limsup \mu^*(E_n) \geq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

۳۷- کدام گزینه درست است؟

- (۱) اگر  $\{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  خانواده‌ای از توابع لیگ اندازه‌پذیر بر  $\mathbb{R}$  باشد آنگاه  $f = \sup f_\gamma$  اندازه‌پذیر است.  
 (۲) اگر دنباله‌ی توابع لیگ اندازه‌پذیر  $\{f_n\}$  بر  $\mathbb{R}$  نقطه‌وار به صفر همگرا باشد آنگاه در اندازه نیز به صفر همگراست.  
 (۳) تابع لیگ اندازه‌پذیر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  موجود است که برای هر  $x, y \in \mathbb{R}$ ،  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  اما  $f$  پیوسته نیست.  
 (۴) تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  لیگ اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر برای زیرمجموعه‌ای چگال در  $\mathbb{R}$  مانند  $D$  و برای هر  $\alpha \in D$  مجموعه  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$  لیگ اندازه‌پذیر باشد.

۳۸- برای دنباله  $\{x_n\}$  تعریف می‌کنیم  $\sup_n \|x_n\|_\infty$ ، کدام فضا نسبت به  $\|\cdot\|_\infty$  باناخ است؟

$$(۱) \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

$$(۲) \{x_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$$

$$(۳) \{x_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

(۴)  $\{x_n\}$  فقط تعداد متناهی  $x_n$  ناصفر است.

۳۹- کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته و کراندار باشد، آنگاه  $\inf\{\alpha : m(\{x : f(x) > \alpha\}) = 0\} = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

(۲) اگر برای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^Y(\mathbb{R})$  و  $f_n \xrightarrow{L^Y(\mathbb{R})} 0$  و  $f_n \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} 0$  آنگاه  $f_n \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} 0$

(۳) اگر  $1 < p < q < \infty$  آنگاه  $L^q(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$

(۴)  $L^\infty(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$

۴۰- فرض کنید توابع حقیقی  $f_n$  و  $f$  بر  $\mathbb{R}$  لیگ انتگرال‌پذیر باشند. به طوری که دنباله  $\{f_n\}$  به تابع  $f$  تقریباً همه جا

به طور نقطه‌ای همگراست. در این صورت کدام گزینه با  $\int_{\mathbb{R}} |f_n - f| dm \rightarrow 0$  معادل است؟

$$(۱) \int_{\mathbb{R}} |f_n| dm \rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f| dm$$

$$(۲) \int_{\mathbb{R}} f_n dm \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f dm$$

(۳)  $f_n \rightarrow f$  در اندازه

(۴)  $f_n \rightarrow f$  به‌طور یکنواخت بر  $\mathbb{R}$

۴۱- مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n \frac{x \ln(1 + \frac{x}{n})}{1+x} dx$  کدام است؟

$$(۱) \ln 2$$

$$(۲) \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$(۳) \ln 2 - 1$$

$$(۴) 2 \ln 2 - 1$$

۴۲- فرض کنید  $m$  اندازه لبگ روی  $\mathbb{R}$  و  $m^*$  اندازه خارجی متناظر با  $m$  باشد و

$$A = \{m^*(E) \mid E \subseteq \mathbb{R} \text{ نامتناهی با درون تهی باشد}\}$$

در این صورت کدام گزینه درست است؟

(۱)  $A = \{0\}$

(۲)  $A = [0, +\infty]$

(۳)  $A = \{0, +\infty\}$

(۴)  $A = [0, +\infty)$

۴۳- اگر  $E \subseteq ]0, \frac{\pi}{4}]$  زیرمجموعه اندازه ناپذیر لبگ باشد و

$$f(x) = \begin{cases} X_E(x) + \sin x & x \in Q \cap ]0, \frac{\pi}{4}] \\ |x| + \sin x & x \in Q^c \cap ]0, \frac{\pi}{4}] \end{cases}$$

کدام گزینه

درست است؟

(۱)  $f$  بر  $]0, \frac{\pi}{4}]$  لبگ اندازه پذیر نیست.

(۲)  $f$  بر  $]0, \frac{\pi}{4}]$  لبگ انتگرال پذیر نیست.

(۳) تابع  $f$  بر  $]0, \frac{\pi}{4}]$  لبگ انتگرال پذیر است و مقدار انتگرال  $f$  بر  $]0, \frac{\pi}{4}]$  برابر  $\frac{\pi}{4}$  است.

(۴) تابع  $f$  بر  $]0, \frac{\pi}{4}]$  لبگ انتگرال پذیر است و مقدار انتگرال  $f$  بر  $]0, \frac{\pi}{4}]$  برابر  $\frac{\pi}{4} - 1$  است.

۴۴- فرض کنید  $M = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R} \setminus ]0, 1], f(x) = 0\}$  و  $P_M : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R})$  تصویر متعامد روی  $M$

باشد. برای هر  $f \in L^1(\mathbb{R})$  داریم:

(۱)  $P_M(f) = f$

(۲)  $P_M(f) = f \cdot x_{]0, 1]}$

(۳)  $P_M(f) = 1 - f$

(۴)  $P_M(f) = (1 - f) \cdot x_{]0, 1]}$

۴۵- عملگر خطی  $T : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$  را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$T(x, y) = (x - y, 0) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

(برای هر  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ،  $\|(x, y)\|_p = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) در این صورت کدام گزینه درست است؟

(۱)  $\|T\| = 2\sqrt{2}$

(۲)  $\|T\| = 1$

(۳)  $\|T\| = \sqrt{2}$

(۴) عملگر  $T$  بی کران است.