جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
معاونت دانش‌پژوهان جوان

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۰ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

دفترچه سوالات سی و پنجمین دوره المپیاد ریاضی - روز اول

تاریخ: ۱۳۹۶/۱/۳۱ - ساعت: ۸:۳۰ مدت: ۲۷۰ دقیقه

شماره پرونده:
کد ملی:
نام پدر:
نام مدرسه:

شماره صندلی

حوزه:

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱- این پاسخ‌نامه به‌صورت نیمه‌کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ‌نامه با مشخصات شما هم‌خوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین‌شده خود بنویسید. چنان‌چه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
۴- با توجه به آن‌که برگه‌های پاسخ‌نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچ‌گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک‌نویس، حل کرده و آن‌گاه در پاسخ‌نامه پاک‌نویس نمایید.
۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به‌صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان‌دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
۶- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
۸- شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه دهم و سوم متوسطه انتخاب می‌شوند.
۹- بارم هر سوال ۷ نمره است.

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

۱) در این سؤال منظور از (a,b)، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b است.

الف) ثابت کنید دنباله‌ٔ a_1، a_2، a_3 و... از اعداد طبیعی وجود ندارد که برای هر $i,j \in \mathbb{N}$ که $i < j$

$$(a_i + j, a_j + i) = 1.$$

ب) گیریم p عددی اول و فرد باشد. ثابت کنید دنبالهٔ a_1، a_2، a_3 و... از اعداد طبیعی وجود دارد به‌طوری‌که هیچ‌کدام از عبارات $(a_i + j, a_j + i)$ (که $i < j$) بر p بخش‌پذیر نباشند.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد.

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

۲) نقطهٔ P داخل ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$، که در آن $AB \parallel CD$، طوری انتخاب شده که $\widehat{APB} > \widehat{ADC}$ و $\widehat{DPC} > \widehat{ABC}$. ثابت کنید $AB + CD > AD - BC$.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

۳) جدولی $n \times n$ داریم که n بر ۳ بخش‌پذیر است. می‌خواهیم برخی از خانه‌های جدول را سیاه کنیم با این شرط که در هر زیرجدول $m \times m$ از آن، که $1 < m$، تعداد خانه‌های سیاه از تعداد خانه‌های سفید بیش‌تر نباشد. حداکثر چند خانه را می‌توانیم سیاه کنیم؟

به نام او

در ادامه، راه‌حل سؤال‌های آزمون مرحلهٔ دوم سی و پنجمین المپیاد ریاضی آمده است. در این مورد لازم است به چند نکته اشاره شود:

۱. از نظر کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی راه‌حل‌های این سؤالات محدود به این‌ها نیست و هر راه‌حل درستی مورد قبول قرار خواهد گرفت.

۲. کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی و تیم مصحح هر سؤال، تا قبل از شروع تصحیح برگه‌ها و در طول تصحیح تلاش خواهند کرد راه‌حل‌های دیگر را نیز شناسایی کنند و در بارم‌بندی به آن‌ها توجه داشته باشند.

۳. آن‌چه در ادامه می‌آید ممکن است در بیان برخی جزئیات کامل نباشد زیرا هدف این است که دبیران و دانش‌آموزان عزیز با کلیات راه‌حل‌ها آشنا شوند و اگر راه‌حل دیگری دارند آن را به اطلاع کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی برسانند.

۴. لطفاً اگر می‌خواهید راه‌حل جدیدی ارسال کنید، آن را بادقت و منظم بنویسید. حتماً راه‌حل‌های موجود را مطالعه فرمایید و از فرستادن راه‌حل تکراری اجتناب کنید.

با تشکر،
کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی
اردیبهشت ۱۳۹۶

۱. در این سؤال منظور از $\left(a,b\right)$، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b است.

الف) ثابت کنید دنبالهٔ $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و... از اعداد طبیعی وجود ندارد که برای هر $i,j \in \mathbb{N}$ که $i < j$

$$\left(a_i + j, a_j + i\right) = ۱.$$

ب) گیریم p عددی اول و فرد باشد. ثابت کنید دنبالهٔ $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و... از اعداد طبیعی وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $i,j \in \mathbb{N}$، که $i < j$، عبارت $\left(a_i + j, a_j + i\right)$ بر p بخش‌پذیر نباشد.

راه حل:

الف) اگر i، a_i، j و a_j همگی زوج یا همگی فرد باشند $(a_i + j, a_j + i)$ زوج می‌شود. پس به جز حداکثر دو مقدار i زوجیت i و a_i متفاوت است پس i و j وجود دارند که i فرد و j زوج باشد و a_i زوج و a_j فرد باشد که مجدداً $\left(a_i + j, a_j + i\right)$ زوج می‌شود.

ب) دنباله را چنین می سازیم:

$$a_n = pn - n + ۱$$

اگر $p | pn - n + ۱ + m$ و $p | pm - m + ۱ + n$ با کم کردن دو رابطه داریم:

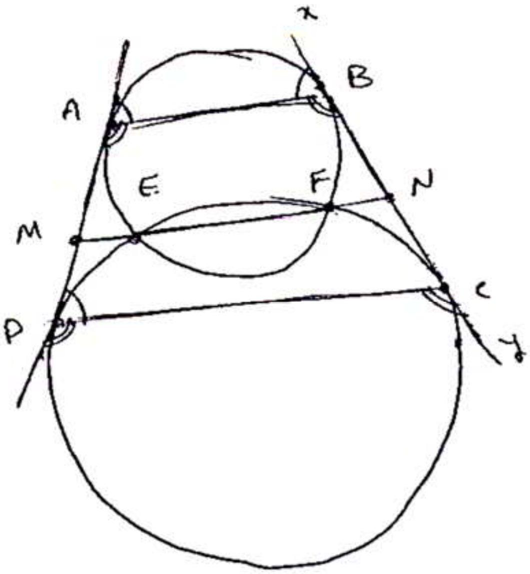
$$p | n - m$$

اگر با رابطه اول جمع کنیم $p | pn + ۱$، که تناقض است.

نکته: راه‌های دیگری هم برای ساختن این دنباله وجود دارد.

۲. نقطهٔ P داخل ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$، که در آن $AB \mid\mid CD$، طوری انتخاب شده که $\widehat{APB} > \widehat{ADC}$ و $\widehat{DPC} > \widehat{ABC}$. ثابت کنید $AB + CD > AD + BC$.

راه‌حل:



در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌دانیم $\hat{ADC} = \hat{ABx}$ و $\hat{ABC} = \hat{DCy}$.

اگر دایره‌ای بکشیم که در A و B بر AD و BC مماس باشند، می‌دانیم که نقطه P درون این دایره است. چرا که $\hat{APB} > \hat{ABx}$. همچنین اگر دایره‌ای بکشیم که در C و D بر BC و AD مماس باشد به دلیل مشابه می‌دانیم که نقطه P درون این دایره است. پس این دو دایره همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. اگر این دو نقطه را E و F بنامیم و EF را رسم کنیم تا AD و BC را در M و N قطع کند. داریم:

$NF \cdot NE = NB^2 = NC^2$ $\xRightarrow{\text{طبق نامساوی میانگین هندسی}}$ $NF + NE > NB + NC$

$ME \cdot MF = MA^2 = MD^2$ $\Rightarrow$ $ME + MF > MA + MD$

حال اگر دو نامساوی را با هم جمع کنیم داریم:

$2MN > AD + BC$

و چون M و N وسط دو ساق هستند داریم:

$2MN = AB + DC$

پس حکم مسئله ثابت می‌شود

$AB + DC > AD + BC$

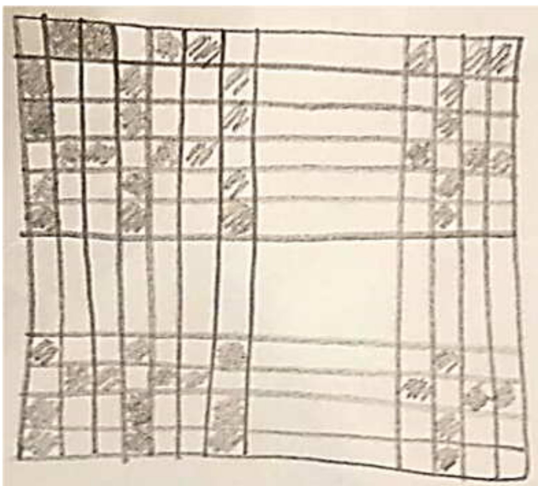
۳. جدولی $n \times n$ داریم که n بر ۳ بخش‌پذیر است. می‌خواهیم برخی از خانه‌های جدول را سیاه کنیم با این شرط که در هر زیرجدول $m \times m$ از آن، که $m > ۱$، تعداد خانه‌های سیاه از تعداد خانه‌های سفید بیش‌تر نباشد. حداکثر چند خانه را می‌توانیم سیاه کنیم؟

راه‌حل:

فرض کنید n برابر $۳k$ باشد. نشان می‌دهیم جواب مسأله برابر $۴k^۲$ است:

اگر جدول را به مربع‌های ۳×۳ افراز کنیم، به تعداد $k^۲$ مربع به وجود می‌آید که در هر یک حداکثر ۴ خانهٔ سیاه داریم، در نتیجه حداکثر $۴k^۲$ خانهٔ سیاه داریم. (۱)

شکل زیر مثالی با $۴k^۲$ خانهٔ سیاه را نشان می‌دهد، زیرا هر جدول ۳×۳ دقیقاً ۴ خانهٔ سیاه در آن دارد.



در این شکل رنگ‌آمیزی در راستاهای افقی و عمودی تناوب ۳ دارند.

یک زیرمربع $m \times m$ دل‌خواه را در نظر بگیرید. با استقرا روی m ثابت می‌کنیم مربع $m \times m$ روی این جدول ویژگی مسأله را دارد.

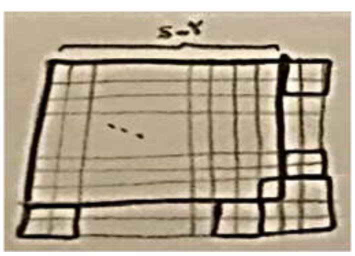
پایهٔ استقرا: $m = ۲,۳$ با بررسی ۹ حالت ۲×۲ و ۹ حالت ۳×۳ می‌بینیم که رنگ‌آمیزی ارائه‌شده این ویژگی را دارد.

حکم را برای $m = ۲,۳,\ldots,s-۱$ فرض می‌کنیم و برای $m = s$ ثابت می‌کنیم.

در حالتی که s زوج است:

زیر مربع $s \times s$ را به مربع‌های ۲×۲ افراز می‌کنیم و طبق فرض استقرا هر مربع ۲×۲ در جدول حداکثر ۲ مربع سیاه دارد، پس مربع $s \times s$ نیز حداکثر نصف خانه‌هایش سیاه است.

در حالتی که s فرد است:



با توجه به فرض استقرا تعداد خانه‌های سیاه مربع $s \times s$ کوچک‌تر یا مساوی عبارت زیر است:

$$\frac{(s-۲)^۲-۱}{۲} + ۲ \times \left(۲ \times \frac{s-۳}{۲}\right) + \frac{۳^۲-۱}{۲}$$
$$= \frac{۱}{۲}(s^۲ - ۴s + ۴ - ۱ + ۴s - ۱۲ + ۹ - ۱)$$
$$= \frac{s^۲-۱}{۲}$$