

گد گنترل

276

E

نام:

نام خانوادگی:



محل امضاء:

dan, Zvezda

1396/12/4

دفتريچه شماره (۱)



«اماگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»

امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

سازمان صنعتی آموزش کشور

آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه‌متمرکز) - سال ۱۳۹۷

وشتہ فیوٹک (کد ۲۲۳۸)

مدت پاستگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سوال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سوالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه درس تخصصی: مکانیک کوانتومی و مکانیک کوانتومی پیشرفته - الکترومغناطیس و الکترونیکی - ترمودینامیک و مکانیک آماری پیشرفته ۱	۴۵	۱	۴۵

استفاده از هاشیم حساب مجاز نیست.

این آزمون نحوه متفی دارد.

عمل چاره تکلیف و اختصار بولالات به طور انحصاری و اختصاصی در این زمینه است. این امر نیز بر تفریق و تفکیک این دو نوع از یکدیگر تأکید دارد و با تفکیک این دو نوع از یکدیگر، عمل چاره تکلیف و اختصار بولالات به طور انحصاری و اختصاصی در این زمینه است.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی در جلسه این آزمون شرکت می‌نمایم.

امضا:

۱- عملگر $a = i|1\rangle\langle 2|$ را که در آن $|1\rangle$ و $|2\rangle$ حالت‌های بهنجار متعامد هستند در نظر بگیرید. حاصل جابه‌جاگر $[a, a^\dagger]$ کدام است؟ ($i = \sqrt{-1}$)

$$(1) |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|$$

$$(2) |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|$$

$$(3) |1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|$$

$$(4) |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|$$

۲- هامیلتونی دستگاهی به صورت $H = a_0 \hat{1} + \vec{\sigma} \cdot \vec{a}$ است که در آن $\hat{1}$ ماتریس واحد، $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ضریبی حقیقی و σ_i ها ($i = 1, 2, 3$) ماتریس‌های پائولی هستند. قدر مطلق تفاضل بین ویژه مقادیر انرژی این دستگاه کدام است؟

$$(1) \sqrt{a_1^2 + |a_2 - a_3|^2}$$

$$(2) \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$(3) \sqrt{a_1^2 + |a_2 + a_3|^2}$$

$$(4) 2(a_1 + a_2 + a_3)$$

۳- عملگر $S_n = \vec{S} \cdot \hat{n}$ را که در آن $\hat{n} = \sin\beta \hat{i} + \cos\beta \hat{k}$ ، $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ و σ ها ماتریس‌های پائولی هستند در نظر بگیرید. نمایش عملگر S_n در پایه $|+\rangle$ و $|-\rangle$ ، ویژه حالت‌های عملگر S_z ، کدام است؟

$$(1) \frac{\hbar}{2} \cos\beta (|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|) + \frac{\hbar}{2} \sin\beta (|+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle +|)$$

$$(2) \frac{\hbar}{2} \cos\beta (|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|) + \frac{\hbar}{2} \sin\beta (|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|)$$

$$(3) \frac{\hbar}{2} \cos\beta (|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|) + \frac{\hbar}{2} \sin\beta (|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|)$$

$$(4) \frac{\hbar}{2} \cos\beta (|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|) + \frac{\hbar}{2} \sin\beta (|+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle +|)$$

۴- اگر $|n\rangle$ ویژه حالت انرژی یک نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی به جرم m و بسامد زاویه‌ای ω و

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right)$$
 عملگر پایین آورنده باشد، حاصل عبارت $\langle m | xp + px | n \rangle$ کدام است؟

$$i\hbar \left(\sqrt{(m+1)n} \delta_{m+1, n-1} - \sqrt{m(n+1)} \delta_{m-1, n+1} \right) \quad (1)$$

$$i\hbar \left(-\sqrt{m(m-1)} \delta_{m-2, n} - \sqrt{n(n-1)} \delta_{m, n-2} \right) \quad (2)$$

$$i\hbar \left(\sqrt{(m+1)(m+2)} \delta_{m+2, n} - \sqrt{n(n-1)} \delta_{m, n-2} \right) \quad (3)$$

$$i\hbar \left(\sqrt{m(n+1)} \delta_{m-1, n+1} - \sqrt{n(m+1)} \delta_{m+1, n-1} \right) \quad (4)$$

۵- ذره‌ای به جرم m در چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی به عرض a ، $(0 < x < a)$ ، قرار دارد. تبدیل فوری

$$\tilde{K}(x, x'; E) = \int_0^\infty dt e^{\frac{iEt}{\hbar}} K(x, t; x', 0)$$
 انتشارگر این ذره، $\tilde{K}(x, x'; E)$ کدام است؟

$$\tilde{K}(x, x'; E) = \sqrt{\frac{2}{a}} i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \sin\left(\frac{n\pi x'}{a}\right)}{E - \frac{n^2 \hbar^2}{2ma^2}} \quad (1)$$

$$\tilde{K}(x, x'; E) = \frac{2i\hbar}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x'}{a}\right)}{E + \frac{n^2 \hbar^2}{2ma^2}} \quad (2)$$

$$\tilde{K}(x, x'; E) = \sqrt{\frac{2}{a}} i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \sin\left(\frac{n\pi x'}{a}\right)}{E + \frac{n^2 \hbar^2}{2ma^2}} \quad (3)$$

$$\tilde{K}(x, x'; E) = \frac{2i\hbar}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x'}{a}\right)}{E - \frac{n^2 \hbar^2}{2ma^2}} \quad (4)$$

۶- در یک فضای سه بعدی، ماتریس چگالی یک دستگاه بر حسب پایه‌های بهنجار متعامد $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, |\Psi_3\rangle$ به

$$\rho = \cos^2 \theta |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + \sin^2 \theta |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta |\Psi_3\rangle\langle\Psi_3|$$
 شکل

می‌باشد. اگر $[A]$ میانگین آنسامبلی عملگر $A = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ باشد که در آن $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\Psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\Psi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\Psi_3\rangle$ کدام نامساوی درست است؟

$$\frac{1}{8} \leq [A] \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \leq [A] \leq \frac{3}{8} \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \leq [A] \leq \frac{3}{8} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \leq [A] \leq \frac{1}{2} \quad (4)$$

۷- ذرات با اسپین ۱ را از یک دستگاه اشترن - گرلاخ که میدان مغناطیسی آن در جهت $\hat{n} = \sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{k}$ است عبور می دهیم، این دستگاه مشاهده پذیر $\vec{S} \cdot \hat{n}$ را اندازه گیری می کند. ذرات خروجی را که دارای ویژه مقدار بزرگتر هستند جدا می کنیم و آن ها را از دستگاه اشترن - گرلاخ دیگری که میدان مغناطیسی آن در جهت $\hat{k}$ است عبور می دهیم. احتمال این که ذرات خروجی از دستگاه دوم دارای $s_z = \hbar$ باشند، چقدر است؟

$$d^{(1)}(\beta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos\beta & -\sqrt{2} \sin\beta & 1 - \cos\beta \\ \sqrt{2} \sin\beta & 2 \cos\beta & -\sqrt{2} \sin\beta \\ 1 - \cos\beta & \sqrt{2} \sin\beta & 1 + \cos\beta \end{pmatrix} \quad \text{در صورت نیاز:}$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (۱)$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (۲)$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (۳)$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (۴)$$

۸- $X^{(k_1=2)}$ و $Z^{(k_2=3)}$ دو تانسور کروی تقلیل ناپذیر رتبه ۲ و ۳ هستند. از ترکیب خطی مؤلفه های مختلف حاصل ضرب این دو، $X_{q_1}^{(k_1)} Z_{q_2}^{(k_2)}$ می توان تانسور کروی تقلیل ناپذیر رتبه k ساخت. کدام مقادیر را می تواند اختیار کند؟

$$k = 5, k = 3, k = 1 \quad (۱)$$

$$k = 4, k = 2, k = 0 \quad (۲)$$

$$k = 6, k = 4, k = 2 \quad (۳)$$

$$k = 6, k = 3, k = 0 \quad (۴)$$

۹- $D^{(j)} = e^{\frac{-i}{\hbar} \vec{J} \cdot \hat{n} \phi}$ عملگر دوران حول $\hat{n}$ به اندازه ϕ است. برای $\hat{n}$ و ϕ ی دلخواه، عملگر $D^{(j_1=\frac{1}{2})} \otimes D^{(j_2=\frac{1}{2})}$ در پایه های $|j, m\rangle$ حداکثر چند عنصر صفر دارد؟ $|j, m\rangle$ ویژه حالت مشترک J_z و J^2 است که $\vec{J} = \vec{J}_1 \otimes \vec{1} + \vec{1} \otimes \vec{J}_2$ است.

$$5 \quad (۱)$$

$$6 \quad (۲)$$

$$7 \quad (۳)$$

$$8 \quad (۴)$$

۱۰- هامیلتونی دستگاهی به شکل $H = \sum_{n=1}^N E_n |n\rangle\langle n| + \sum_{n=1}^N W \{ |n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n| \}$ است که حالت‌های $|n\rangle$

متعامد و بهنجار هستند و E_n و W ضرایب ثابت‌اند. اگر شرط تناوبی $|N+1\rangle = |1\rangle$ برقرار باشد، ویژه مقادیر H کدام‌اند؟ ($n = 1, 2, \dots, N$)

$$E_n = E_0 + 2W \sin \frac{\pi n}{N} \quad (1)$$

$$E_n = E_0 + 2W \cos \frac{\pi n}{N} \quad (2)$$

$$E_n = E_0 + 2W \cos \frac{2\pi n}{N} \quad (3)$$

$$E_n = E_0 + 2W \sin \frac{2\pi n}{N} \quad (4)$$

۱۱- اگر θ عملگر وارون زمان، $|+\rangle$ و $|-\rangle$ ویژه حالت‌های ماتریس پائولی σ_z و $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$ باشد،

کدام عبارت صحیح است؟

$$\theta^\dagger |\alpha\rangle = |\alpha\rangle \quad (1)$$

$$\theta^\dagger |\alpha\rangle = -|\alpha\rangle \quad (2)$$

$$\theta^\dagger |\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle \quad (3)$$

$$\theta^\dagger |\alpha\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle \quad (4)$$

۱۲- هامیلتونی یک نوسانگر هماهنگ ساده سه بعدی همسانگرد $H = \frac{\vec{P} \cdot \vec{P}}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{x} \cdot \vec{x}$ است. اگر این نوسانگر با

انرژی پتانسیل $\lambda y x^2 z$ مختل شود، انرژی نخستین حالت برانگیخته تا اولین مرتبه غیر صفر λ کدام است؟

($\vec{x}$ و $\vec{P}$ به ترتیب عملگر مکان و تکانه خطی در سه بعد هستند.)

$$\frac{3}{2} \hbar \omega \pm 2\lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2, \quad \frac{3}{2} \hbar \omega \quad (1)$$

$$\frac{3}{2} \hbar \omega \pm \frac{2}{\hbar \omega} \lambda^2 \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^4, \quad \frac{3}{2} \hbar \omega \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \hbar \omega \pm \frac{1}{\hbar \omega} \lambda^2 \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^4, \quad \frac{3}{2} \hbar \omega \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \hbar \omega \pm \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2, \quad \frac{3}{2} \hbar \omega \quad (4)$$

۱۳- ذره‌ای به جرم m در لحظه $t = 0$ در حالت پایه یک چاه کوانتومی بی‌نهایت یک بعدی که دیواره‌هایش در $x = 0$ و

$x = a$ است، قرار دارد. این ذره برای زمان‌های $0 \leq t \leq \infty$ تحت تأثیر پتانسیل اختلالی $V(t) = \lambda x^2 e^{-t/\tau}$ قرار می‌گیرد که در آن x عملگر مکان، τ پارامتر حقیقی ثابت و λ عدد حقیقی بسیار کوچکی هستند. احتمال آن که

ذره در لحظه دلخواه $t \geq 0$ در اولین حالت برانگیخته چاه یافت شود کدام است؟ $(\omega_{21} = \frac{3\pi^2 \hbar}{2ma^2})$

$$\left(\frac{16a^2 \lambda}{9\pi^2 \hbar} \right)^2 \left[\frac{1 + e^{-t/\tau} \sin(\omega_{21} t)}{\omega_{21}^2 + \frac{1}{\tau^2}} \right]^2 \quad (1)$$

$$\left(\frac{4a^2 \lambda}{9\pi^2 \hbar} \right)^2 \left[\frac{1 - e^{-t/\tau} \cos(\omega_{21} t)}{\omega_{21}^2 + \frac{1}{\tau^2}} \right]^2 \quad (2)$$

$$\left(\frac{4a^2 \lambda}{9\pi^2 \hbar} \right)^2 \left[\frac{1 + e^{-\tau t/\tau} - \tau e^{-t/\tau} \sin(\omega_{21} t)}{\omega_{21}^2 + \frac{1}{\tau^2}} \right]^2 \quad (3)$$

$$\left(\frac{16a^2 \lambda}{9\pi^2 \hbar} \right)^2 \left[\frac{1 + e^{-\tau t/\tau} - \tau e^{-t/\tau} \cos(\omega_{21} t)}{\omega_{21}^2 + \frac{1}{\tau^2}} \right]^2 \quad (4)$$

۱۴- سطح مقطع پراکندگی کل کشسان ذره‌ای به جرم m از یک کره نرم با پتانسیل $V(r) = \begin{cases} V_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$ در تقریب

اول بورن به ازای $ka \ll 1$ ($E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$) کدام است؟

$$\frac{16\pi}{9} \left(\frac{mV_0 a^2}{\hbar^2} \right)^2 a^2 \quad (1)$$

$$\frac{16\pi}{9} \left(\frac{mV_0 a^2}{\hbar^2} \right) a^2 \quad (2)$$

$$\frac{4\pi}{9} \left(\frac{mV_0 a^2}{\hbar^2} \right) a^2 \quad (3)$$

$$\frac{4\pi}{9} \left(\frac{mV_0 a^2}{\hbar^2} \right)^2 a^2 \quad (4)$$

- ۱۵- دامنه پراکندگی کشسان پاره موج ℓ ام یک ذره به جرم m به شکل $f_{\ell}(k) = \frac{f_0 k_0^2}{k^2 - (\ell+1)k_0^2}$ است. انرژی‌های مجاز حالات مقید این ذره کدام است؟ (k_0 و f_0 ضرایب ثابتی هستند.)

$$\ell \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \quad (۱)$$

$$\ell^2 \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \quad (۲)$$

$$(\ell+1) \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \quad (۳)$$

$$\sqrt{\ell+1} \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \quad (۴)$$

- ۱۶- دوقطبی الکتریکی نقطه‌ای با گشتاور دو قطبی $\vec{P} = P\hat{k}$ در مبدأ مختصات قرار دارد. چگالی بار حجمی بیانگر این توزیع بار کدام است؟

$$\rho = -P \frac{\partial}{\partial z} \delta(\vec{x}) \quad (۱)$$

$$\rho = +P \frac{\partial}{\partial z} \delta(\vec{x}) \quad (۲)$$

$$\rho = -P \frac{d}{dz} \delta(z) \quad (۳)$$

$$\rho = +P \frac{d}{dz} \delta(z) \quad (۴)$$

- ۱۷- بر روی یک سطح رسانای کروی به شعاع R پتانسیل الکتریکی برابر با $\phi = V_0 \cos^2 \theta$ است که در آن V_0 ضربی ثابت و θ زاویه قطبی در دستگاه مختصات کروی است. مبدأ مختصات بر مرکز کره و محور z بر یکی از قطرهای کره منطبق است. درون این سطح باری وجود ندارد. پتانسیل الکتریکی در مرکز کره کدام است؟

$$(۱) \text{ صفر}$$

$$(۲) V_0$$

$$(۳) \frac{1}{3} V_0$$

$$(۴) \frac{1}{2} V_0$$

۱۸- پتانسیل الکتریکی روی سطح یک پوسته کروی رسانا به شعاع R برابر $V(\theta) = V_0 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ است. مبدأ مختصات مطابق بر مرکز پوسته و θ زاویه با محور z است. پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای به مختصات کروی (r, θ) در داخل پوسته کدام است؟

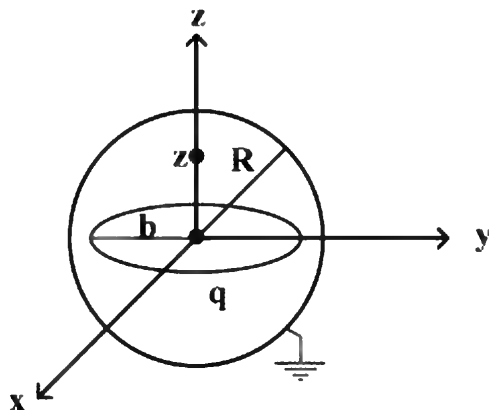
(۱) صفر

$$\frac{V_0}{2} \frac{r}{R} \cos \theta \quad (۲)$$

$$V_0 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{V_0}{2} \left(1 - \frac{r}{R} \cos \theta\right) \quad (۴)$$

۱۹- یک پوسته کروی رسانا به شعاع R در پتانسیل صفر نگه داشته شده است. مبدأ مختصات در مرکز کره قرار دارد. مطابق شکل، درون این کره یک حلقه باردار به شعاع b ($b < R$) و بار q که به صورت یکنواخت بر روی محیط آن توزیع شده است، هم‌مرکز با کره (در صفحه xy) قرار دارد. پتانسیل الکتریکی درون کره در نقطه‌ای روی محور z کدام است؟



$$\phi(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}} - \frac{R}{\sqrt{b^2 z^2 + R^4}} \right] \quad (۱)$$

$$\phi(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{b}{R\sqrt{z^2 + b^2}} - \frac{b}{\sqrt{b^2 z^2 + R^4}} \right] \quad (۲)$$

$$\phi(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{b}{R\sqrt{z^2 + b^2}} - \frac{R}{\sqrt{b^2 z^2 + R^4}} \right] \quad (۳)$$

$$\phi(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}} - \frac{b}{\sqrt{b^2 z^2 + R^4}} \right] \quad (۴)$$

۲۰- یک خط بار نامتناهی با توزیع بار یکنواخت در فضای سه بعدی موازی محور z قرار دارد و در نقطه (ρ', ϕ') از صفحه $x-y$ عبور می‌کند. تابع گرین معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای (ρ, ϕ, z) کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')}} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{4\pi} \ln \left| \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \sin(\phi - \phi') \right| \quad (۲)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \sin(\phi - \phi')}} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{4\pi} \ln \left| \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') \right| \quad (۴)$$

۲۱- یک پوسته استوانه‌ای به شعاع R و طول L با دو قاعده رسانا که در پتانسیل الکتریکی صفر نگه داشته شده‌اند در نظر بگیرید. در دستگاه مختصاتی که مبدأ آن واقع بر یک قاعده و محور z آن منطبق بر محور استوانه است، پتانسیل الکتریکی روی سطح جانبی پوسته با $V(\phi, z)$ داده شده است. قاعده دیگر پوسته در $z = L$ واقع است. کدام عبارت ممکن است پتانسیل الکتریکی نقطه دلخواهی داخل پوسته به مختصات استوانه‌ای (ρ, ϕ, z) را به درستی بیان کند؟ $(I_m(x))$ و $(K_m(x))$ توابع بسل اصلاح شده هستند.

$$V(\rho, \phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\Lambda_{mn} e^{im\phi} \sin \frac{n\pi z}{L} I_m \left(\frac{n\rho}{L} \right) \right) \quad (۱)$$

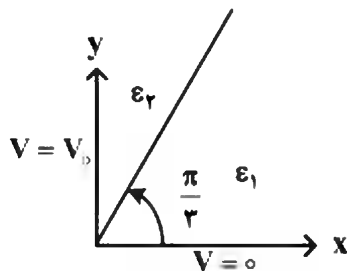
$$V(\rho, \phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left((A_{mn} \sin m\phi + B_{mn} \cos m\phi) \sin \frac{n\pi z}{L} K_m \left(\frac{n\rho}{L} \right) \right) \quad (۲)$$

$$V(\rho, \phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(A_{mn} e^{im\phi} \sin \frac{n\pi z}{L} K_m \left(\frac{n\rho}{L} \right) \right) \quad (۳)$$

$$V(\rho, \phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left((A_{mn} \sin m\phi + B_{mn} \cos m\phi) \sin \frac{n\pi z}{L} I_m \left(\frac{n\rho}{L} \right) \right) \quad (۴)$$

۲۲- مطابق شکل، در دستگاه مختصات استوانه‌ای، دو نیم‌صفحه رسانای $\phi = 0$ و $\phi = \frac{\pi}{3}$ به ترتیب به پتانسیل‌های

الکتریکی صفر و V_0 وصل شده‌اند. ناحیه $0 < \phi \leq \frac{\pi}{3}$ با عایقی به‌گذردهی ϵ_1 و ناحیه $\frac{\pi}{3} \leq \phi < \pi$ با عایق دیگری به‌گذردهی ϵ_2 پر شده است. پتانسیل الکتریکی در نقطه دلخواهی مانند ϕ از ناحیه با‌گذردهی ϵ_1 کدام است؟



$$2V_0 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \quad (۱)$$

$$\frac{\epsilon V_0}{\pi} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \phi \quad (۲)$$

$$\frac{\epsilon V_0}{\pi} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \phi + 2V_0 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \quad (۳)$$

$$\frac{\epsilon V_0}{\pi} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \phi + 2V_0 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \quad (۴)$$

۲۳- یک کره فلزی به شعاع a توسط یک پوسته کروی نازک فلزی هم مرکز به شعاع b ($b > a$) احاطه شده است. فضای میان کره و پوسته با ماده‌ای پر شده است که ضریب رسانندگی الکتریکی آن تابع خطی از میدان الکتریکی است یعنی $\sigma = kE$ که در آن k عددی ثابت است. اگر اختلاف پتانسیل V بین کره و پوسته ایجاد شود، جریان الکتریکی میان کره و پوسته کدام است؟

$$\epsilon \pi k \left(\frac{V}{\ln(b/a)} \right)^2 \quad (1)$$

$$\epsilon \pi k \left(\frac{V^2}{\ln(b/a)} \right) \quad (2)$$

$$\epsilon \pi k a b \left(\frac{V}{b-a} \right)^2 \quad (3)$$

$$\epsilon \pi k a \frac{V^2}{(b-a)} \quad (4)$$

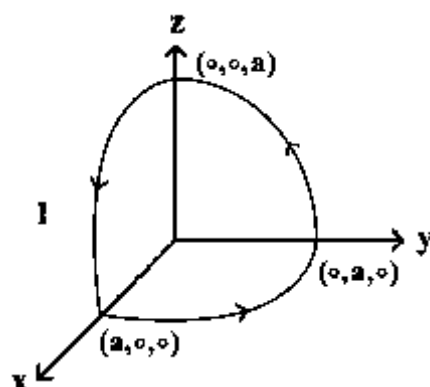
۲۴- مطابق شکل یک حلقه رسانا از سه قوس 90° درجه‌ای دایره‌ای شکل به شعاع a و واقع در صفحات xy ، yz و zx تشکیل شده است. از حلقه جریان I عبور می‌کند و در معرض میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = B_0 \hat{i}$ قرار دارد. گشتاور نیروی وارد بر این حلقه جریان کدام است؟

(۱) صفر

$$\frac{1}{4} B_0 I \pi a^2 (\hat{i} - \hat{j}) \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} B_0 I \pi a^2 (\hat{i} - \hat{k}) \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} B_0 I \pi a^2 (\hat{j} - \hat{k}) \quad (4)$$



۲۵- اگر میدان الکتریکی مستقل از زمان و میدان مغناطیسی در همه زمان‌ها متناهی باشد، کدام رابطه همواره درست است؟

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\epsilon \pi}{c} \vec{J} \quad (4)$$

۲۶- یک سیم مستقیم نامتناهی در راستای محور z را در نظر بگیرید. در لحظه $t = 0$ جریان الکتریکی I در سیم ایجاد می‌شود و برای $t \geq 0$ برقرار می‌ماند. پتانسیل برداری $\vec{A}(\rho, t)$ در نقطه‌ای به فاصله ρ از سیم در لحظه t بر حسب سرعت نور، c ، و سایر کمیت‌های معلوم کدام است؟

(۱) برای $t < \frac{\rho}{c}$ t صفر و برای $t \geq \frac{\rho}{c}$ برابر $\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cosh^{-1}\left(\frac{ct}{\rho}\right) \hat{z}$ است.

(۲) برای $t < \frac{\rho}{c}$ t صفر و برای $t \geq \frac{\rho}{c}$ برابر $\frac{\mu_0 I}{2\pi} \sinh^{-1}\left(\frac{ct}{\rho}\right) \hat{z}$ است.

(۳) برای $t < \frac{\rho}{c}$ t صفر و برای $t \geq \frac{\rho}{c}$ برابر $\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cosh^{-1}\left(\frac{ct}{\rho}\right) \hat{\rho}$ است.

(۴) برای $t < \frac{\rho}{c}$ t صفر و برای $t \geq \frac{\rho}{c}$ برابر $\frac{\mu_0 I}{2\pi} \sinh^{-1}\left(\frac{ct}{\rho}\right) \hat{\rho}$ است.

۲۷- کدام عبارت نادرست است؟

(۱) انرژی کل یک میدان الکترومغناطیسی در حجم V از خلاء برابر $\frac{\epsilon_0}{2} \int_V (E^2 + c^2 B^2) d^3x$ است.

(۲) بردار پوینتینگ یک میدان الکترومغناطیسی در خلاء برابر $\vec{E} \times \vec{B}$ است.

(۳) نکانه خطی یک میدان الکترومغناطیسی در حجم V از خلاء برابر $\epsilon_0 \int_V (\vec{E} \times \vec{B}) d^3x$ است.

(۴) نکانه زاویه‌ای یک میدان الکترومغناطیسی در حجم V از خلاء برابر $\epsilon_0 \int_V \vec{x} \times (\vec{E} \times \vec{B}) d^3x$ است.

۲۸- متوسط توان تابشی بر واحد زاویه فضایی بر حسب عناصر تانسور چهارقطبی Q_{ij} یک توزیع بار الکتریکی نوسان کننده با رابطه $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 z_0}{1152\pi^2} k^6 |\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{Q})|^2$ داده می‌شود که $Q_i = \sum_{j=1}^3 Q_{ij} n_j$ و $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$

بردار مکان یک نقطه‌ای از فضا است. اگر $Q_{11} = -2Q_{22} = -2Q_{33} = Q_0$ و $Q_{i \neq j} = 0$ باشد، توان تابشی کل در تمام جهت‌ها کدام است؟ (z_0 و k مقادیر ثابتی هستند).

(۱) $\frac{c^2 z_0 k^6 Q_0^2}{1440\pi}$

(۲) $\frac{c^2 z_0 k^6 Q_0^2}{1152\pi^2}$

(۳) $\frac{c^2 z_0 k^6 Q_0^2}{960\pi}$

(۴) $\frac{c^2 z_0 k^6 Q_0^2}{512\pi^2}$

۲۹- نیروی وارد بر ذره‌ای به جرم m و بار q در میدان الکتریکی $\vec{E}$ و میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برابر

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}) \text{ است. کدام رابطه درست است؟} \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

$$\frac{d}{dt}(mv^r \gamma) = q \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (۱)$$

$$\frac{d}{dt}(mc^r \gamma + mv^r \gamma) = q \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (۲)$$

$$\frac{d}{dt}(mc^r \gamma) = q \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (۳)$$

$$\frac{d}{dt}(mc^r \gamma - mv^r \gamma) = q \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (۴)$$

۳۰- دو چارچوب لغت K و K' در نظر بگیرید که K' در جهت $+x$ با سرعت V نسبت به K در حرکت است. داریم

$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ که Λ در زیر داده شده است. چهاربردار پتانسیل برای بار نقطه‌ای q ساکن در چارچوب K با

$\vec{E}$ بردار میدان الکتریکی در چارچوب K' کدام است؟ $A^\mu = (A^0 = \phi = \frac{q}{r}, \vec{A} = 0)$ داده شده است.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\vec{E}' = \frac{q}{r^r}(\gamma x, y, z) \quad (۱)$$

$$\vec{E}' = \frac{q}{r^r}(x, \gamma y, \gamma z) \quad (۲)$$

$$\vec{E}' = \frac{q}{r^r}(\gamma x, \gamma\beta y, \gamma\beta z) \quad (۳)$$

$$\vec{E}' = \frac{q}{r^r}(\gamma\beta x, \gamma y, \gamma z) \quad (۴)$$

۳۱- تعداد حالت‌های قابل دسترس یک دستگاه ترمودینامیکی بسته شامل N ذره در حجم V به صورت

$$\Omega(U, N, V) = f(U) \gamma g(N, V) \quad \text{است که} \quad g(N, V) = \left(\frac{V}{V_0} \right)^N \quad \text{و} \quad V > V_0.$$

اگر دمای وابسته به این دستگاه T باشد معادله حالت دستگاه کدام است؟

$$PV = Nk_B T (\ln \gamma) \left(\frac{V}{V_0} \right)^N \quad (۱)$$

$$PV = \gamma Nk_B T \left(\frac{V}{V_0} \right) \quad (۲)$$

$$PV = Nk_B T (\ln \gamma) \left(\frac{V}{V_0} \right) \quad (۳)$$

$$PV = \gamma Nk_B T \left(\frac{V}{V_0} \right)^N \quad (۴)$$

۳۲- آنتروپی یک مول گاز ایده‌آل تک اتمی با جرم مولی M_1 و دمای T_1 با آنتروپی یک مول گاز ایده‌آل تک اتمی با

جرم مولی M_2 و دمای T_2 برابر است. اگر حجم دو گاز با هم برابر باشد، کدام رابطه درست است؟

$$\frac{M_1}{M_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \quad (۱)$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (۲)$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (۳)$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{T_2}{T_1} \quad (۴)$$

۳۳- آنتروپی یک دستگاه ترمودینامیکی $S(N, V, U)$ است. کدام رابطه درست است؟

U, T, P, V, N و μ به ترتیب تعداد ذرات، حجم، فشار، دما، انرژی داخلی و پتانسیل شیمیایی دستگاه است.

$$U + PV - TS + N\mu = 0 \quad (۱)$$

$$U - PV - TS - N\mu = 0 \quad (۲)$$

$$U + PV - TS - N\mu = 0 \quad (۳)$$

$$U + PV + TS - N\mu = 0 \quad (۴)$$

- ۳۴- انرژی کل یک نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی به جرم m ضریب سختی k و دامنه A می‌تواند بین E و $E + \Delta E$ تغییر کند. مساحت فضای فاز قابل دسترس این نوسانگر کدام است؟

$$4\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Delta E \quad (۱)$$

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Delta E \quad (۲)$$

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{(\Delta E)^2}{kA^2} \quad (۳)$$

$$4\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{(\Delta E)^2}{kA^2} \quad (۴)$$

- ۳۵- یک دستگاه ترمودینامیکی شامل N ذره بدون هم‌کنش در مجاورت با چشمه حرارتی به دمای T است. هر ذره می‌تواند در حالت با انرژی E یا حالت با انرژی $E + \Delta E$ باشد. ظرفیت گرمایی در حجم ثابت این دستگاه در حد دماهای بالا $E, \Delta E \ll k_B T$ کدام است؟

$$\frac{1}{2}NK_B\left(\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \quad (۱)$$

$$\frac{1}{4}NK_B\left(\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4}NK_B\left(\frac{\Delta E}{k_B T}\right)^2 \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2}NK_B\left(\frac{\Delta E}{k_B T}\right)^2 \quad (۴)$$

- ۳۶- N نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی هر یک به جرم m بار الکتریکی q و بسامد زاویه‌ای ω در نظر بگیرید.

نوسانگرها با هم برهم‌کنش ندارند. اگر $Q_N = \left(\frac{1}{h} \iint e^{-\beta H(p,x)} dp dx\right)^N$ تابع پارش این نوسانگرها در غیاب میدان الکتریکی باشد، تابع پارش آن‌ها در حضور میدان الکتریکی یکنواخت E کدام است؟ (نیروی وارد بر هر نوسانگر در میدان الکتریکی را به صورت qE در نظر بگیرید.)

$$Q_N e^{\frac{+N\beta q^2 E^2}{2m\omega^2}} \quad (۱)$$

$$Q_N e^{\frac{+N\beta q^2 E^2}{m\omega^2}} \quad (۲)$$

$$Q_N e^{\frac{-N\beta q^2 E^2}{2m\omega^2}} \quad (۳)$$

$$Q_N e^{\frac{-N\beta q^2 E^2}{m\omega^2}} \quad (۴)$$

۳۷- تابع پارش یک دستگاه ترمودینامیکی شامل N ذره گاز در دمای T و حجم V که می‌توان آن‌ها را فرانسبیتی در

نظر گرفت به صورت $Q_N(V, T) = \frac{1}{N!} \left(\lambda \pi V \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3 \right)^N$ است. پتانسیل شیمیایی این دستگاه کدام است؟

$$\mu = k_B T \ln \left(\frac{N}{\lambda \pi} \left(\frac{hc}{k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (۱)$$

$$\mu = k_B T \ln \left(\frac{N}{\lambda \pi V} \left(\frac{hc}{k_B T} \right)^3 \right) \quad (۲)$$

$$\mu = k_B T \ln \left(\frac{N}{\lambda \pi} \left(\frac{hc}{k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{V^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (۳)$$

$$\mu = k_B T \ln \left(\frac{N}{\lambda \pi} \left(\frac{hc}{k_B T V} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \quad (۴)$$

۳۸- نسبت تعداد میکروحالت‌های دو ذره تمیزناپذیر فرمیونی به دو ذره تمیزناپذیر بوزونی در اشغال سه تراز انرژی کدام است؟ (در هر دو حالت ذرات را بدون اسپین فرض کنید.)

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$۱ \quad (۴)$$

۳۹- یک ستاره نوترونی را متشکل از N نوترون بدون برهم‌کنش در نظر بگیرید. اگر T_F دمای فرمی ستاره و U انرژی داخلی ستاره باشد، کدام رابطه درست است؟

$$U = \frac{3}{5} N k_B T_F \quad (۱)$$

$$U = \frac{3}{4} N k_B T_F \quad (۲)$$

$$U = \frac{5}{2} N k_B T_F \quad (۳)$$

$$U = \frac{4}{3} N k_B T_F \quad (۴)$$

۴۰- تعداد فوتون‌ها در کواکی به حجم V و دمای T برابر $N = 6 \times 10^{23} \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3$ است که k_B ، h و c به ترتیب ثابت بولتزمن، سرعت نور و ثابت پلانک است. دمای متوسط عالم در حال حاضر $2.7K$ است. به طور متوسط چند فوتون در هر سانتی متر مکعب عالم وجود دارد؟

$$(1) 4 \times 10^{11}$$

$$(2) 4 \times 10^8$$

$$(3) 4 \times 10^5$$

$$(4) 4 \times 10^2$$

۴۱- هامیلتونی یک ذره آزاد به جرم m در یک بعد $(-\infty < x < +\infty)$ به صورت $H = \frac{p_x^2}{2m}$ است. حاصل $\text{Tr} \left(e^{-\frac{H}{k_B T}} \right)$

کدام است؟

$$(1) \frac{1}{L} \sqrt{\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}}$$

$$(2) \frac{1}{L} \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)$$

$$(3) L \sqrt{\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}}$$

$$(4) L \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)$$

۴۲- تابع توزیع احتمالی تنیدی ماکسولی ذرات در دمای T به صورت $P(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} 4\pi v^2$ است. حاصل عبارت $\langle \frac{1}{v} \rangle < v >$ کدام است؟

$$(1) \frac{\lambda}{\pi}$$

$$(2) \frac{4}{\sqrt{\pi}}$$

$$(3) \frac{4}{\pi}$$

$$(4) \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}$$

۴۳. انرژی یک گاز فوتونی در کواکی به حجم V و دمای T برابر $U = \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{15 (hc)^3} V$ است. S آنتروپی و μ پتانسیل

شیمیایی این گاز کدام است؟

$$\mu = \frac{8\pi^5 (k_B T)^4}{45 (hc)^3} V \text{ و } S = \frac{32\pi^5}{45} V \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3 k_B \quad (۱)$$

$$\mu = \frac{\pi^5 (k_B T)^4}{45 (hc)^3} V \text{ و } S = \frac{4\pi^5}{45} V \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3 k_B \quad (۲)$$

$$\mu = 0 \text{ و } S = \frac{4\pi^5}{45} V \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3 k_B \quad (۳)$$

$$\mu = 0 \text{ و } S = \frac{32\pi^5}{45} V \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3 k_B \quad (۴)$$

۴۴. چگالی حالت‌ها برای ذرات آزاد غیرنسبیتی به جرم m و اسپین $\frac{1}{2}$ محصور در حجم V و با انرژی بین ϵ و $\epsilon + d\epsilon$

برابر با $D(\epsilon)d\epsilon = \frac{2V}{(2\pi)^3} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} d\epsilon$ است. تعداد ذرات در واحد حجم ظرف در دمای T کدام است؟

$$\frac{2}{\pi^2} \left(\frac{2mk_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{(x^2 - \mu)/k_B T} + 1} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{\pi^2} \left(\frac{2mk_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{k_B T}{\mu} \int_0^\infty \frac{x dx}{e^{(x^2 - \mu)/k_B T} + 1} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{2mk_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{k_B T}{\mu} \int_0^\infty \frac{x dx}{e^{(x^2 - \mu)/k_B T} + 1} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{2mk_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{(x^2 - \mu)/k_B T} + 1} \quad (۴)$$

۴۵. یک دستگاه ترمودینامیکی شامل چهار ذره در دمای T است. این ذرات با هم برهم‌کنش دارند به طوری که انرژی دستگاه یکی از مقادیر $E = -J(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_4)$ به ازای $s_i = -1, +1$ ($i = 1, 2, 3, 4$) است. تابع پارتیشن

این دستگاه کدام است؟ $(\beta = \frac{1}{k_B T})$

$$2^3 (\cosh \beta J)^3 \quad (۱)$$

$$2^4 (\cosh \beta J)^3 \quad (۲)$$

$$2^3 (\cosh \beta J)^4 \quad (۳)$$

$$2^4 (\cosh \beta J)^4 \quad (۴)$$

