

کد کنترل

271

E



271E

نام:

نام خانوادگی:

محل امضا:



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»

امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

سازمان سنجش آموزش کشور

صبح جمعه

۱۳۹۶/۱۲/۴

دفترچه شماره (۱)

آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه‌متمرکز) - سال ۱۳۹۷

رشته ریاضی محض (کد ۲۲۳۳)

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی: مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی - مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی - مبانی جبر - جبر پیشرفته - آنالیز حقیقی	۴۵	۱	۴۵

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ و تکرار سؤالات به هر روش (فوتوکپی، اسکن، ...) پس از برگزاری آزمون برای سنجش اختصاص حاکمی و دولتی، لذا با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و متعلقین به هر دولتی و غیر دولتی می‌باشد.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی در جلسه این آزمون شرکت می‌نمایم.

امضا:

۱- فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی یکنوا باشد. کدام گزینه پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد؟
(۱) f برد f بسته باشد.

(۲) f خاصیت مقدار میانی داشته باشد.

(۳) حد تابع f در هر نقطه بازه $[a, b]$ موجود باشد.

(۴) f بر $[a, b]$ دارای تابع اولیه باشد.

۲- فرض کنید $A = \{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$ زیر مجموعه اعداد حقیقی باشد. $\bar{A}$ بستار A و ∂A مرز A

است. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

(۱) A بسته نیست و $\partial A \neq \bar{A}$

(۲) A بسته نیست و $\partial A = \bar{A}$

(۳) A بسته است و $\partial A = \bar{A}$

(۴) A بسته است و $\partial A \neq \bar{A}$

۳- فرض کنید E زیر مجموعه‌ای از فضای متریک (X, d) است به طوری که $\bar{E} = E$ و $E^\circ = \emptyset$. اگر

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

آنگاه کدام گزینه درست است؟

(۱) f فقط بر E^c پیوسته است.

(۲) f فقط بر E پیوسته است.

(۳) f همه جا پیوسته است.

(۴) f هیچ جا پیوسته نیست.

۴- فرض کنید d_1 و d_2 دو متر بر مجموعه ناتهی X باشند، به طوری که برای هر دنباله $\{x_n\}$ در X و $x \in X$ ، اگر

$$d_1(x_n, x) \rightarrow 0 \text{ آنگاه } d_2(x_n, x) \rightarrow 0 \text{ کدام گزینه نادرست است؟}$$

(۱) اگر (X, d_1) همبند باشد، آنگاه (X, d_2) همبند است.

(۲) اگر (X, d_1) فشرده باشد، آنگاه (X, d_2) فشرده است.

(۳) اگر (X, d_1) کامل باشد، آنگاه (X, d_2) کامل است.

(۴) اگر $E \subseteq X$ در (X, d_2) بسته باشد، آنگاه E در (X, d_1) بسته است.

۵- فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ کراندار، $a \in \mathbb{R}$ و $A = \left\{ \frac{f(a) - f(x)}{a - x} : x \in \mathbb{R}, x \neq a \right\}$. کدام گزینه درست است؟

- (۱) اگر A بیکران باشد آن گاه f در a مشتق پذیر است.
- (۲) اگر f در a مشتق پذیر باشد آن گاه A بیکران است.
- (۳) اگر f در a مشتق پذیر باشد آن گاه A کراندار است.
- (۴) اگر A کراندار باشد آن گاه f در a مشتق پذیر است.

۶- اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) + x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = 1$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱) f بیکران است.
- (۲) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ موجود است.
- (۳) f بینهایت بار مشتق پذیر است.
- (۴) مجموعه نقاطی که تابع f صفر می شود متناهی است.

۷- تابع $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید و قرار دهید $f_n(x) = f(x^n)$ ($n \geq 1$). کدام گزینه شرط لازم و کافی برای هم پیوستگی دنباله $\{f_n\}$ است؟

- (۱) f کراندار باشد.
- (۲) f پیوسته باشد.
- (۳) f پیوسته یکنواخت باشد.
- (۴) f تابع ثابت باشد.

۸- سری $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \sin(nx) (1 - \sin x)^n$ بر بازه $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right]$...

- (۱) برای هیچ $\alpha > 0$ همگرایی نقطه ای نیست.
- (۲) برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ همگرایی یکنواخت است.
- (۳) فقط برای $\alpha < -1$ همگرایی یکنواخت است.
- (۴) برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ همگرایی نقطه ای است ولی همگرایی یکنواخت نیست.

۹- به ازای چه مقادیری از a سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \sin(na)}{n}$ همگرا می باشد؟

- (۱) $a \in \mathbb{Z}$
- (۲) $a \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
- (۳) $a \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{2k+1}{2} \pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
- (۴) $a \in \mathbb{R}$

۱۰- تبدیل خطی $D: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ با ضابطه $D: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - x_1 \\ \vdots \\ x_n - x_1 \end{pmatrix}$ داده شده است. در این صورت نمایش ماتریس D

نسبت به پایه استاندارد برابر است با:

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ -1 & & & \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & & \\ \vdots & & -I_{n-1} & \\ -1 & & & \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 0 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ -1 & & & \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

۱۱- فرض کنید A ماتریس 5×5 باشد که همه درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر با ۶ و مابقی درایه‌ها برابر با ۱ هستند. $\det(A)$ کدام است؟

$$(1) 2(\Delta^4)$$

$$(2) 2(\Delta^5)$$

$$(3) 2(\Delta^6)$$

$$(4) 2(\Delta^7)$$

۱۲- فرض کنید V و W فضاهای برداری روی میدان F و $S \subseteq V$ و $S^\circ = \{T \in L(V, W) \mid \forall x \in S: T(x) = 0\}$ اگر

V_1 و V_2 زیرفضاهای V باشند، آنگاه $(V_1 + V_2)^\circ$ برابر است با:

$$(1) V_1^\circ \cap V_2^\circ$$

$$(2) V_1^\circ + V_2^\circ$$

$$(3) (V_1 \cap V_2)^\circ$$

$$(4) \{0\}$$

۱۳- فرض کنید $P_n(\mathbb{C})$ فضای برداری تمام چندجمله‌ای‌ها از درجه حداکثر n با ضرایب روی میدان اعداد مختلط

باشد و $T: P_7(\mathbb{C}) \rightarrow P_7(\mathbb{C})$ با ضابطه $T(f(x)) = 2f'(x) + \int_0^x f(t) dt$ باشد. در این صورت اگر $a = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Im}(T))$ و $b = \dim_{\mathbb{R}}(\ker(T))$ آنگاه:

$$(1) \quad b=4, a=2$$

$$(2) \quad b=2, a=4$$

$$(3) \quad b=3, a=3$$

$$(4) \quad b=0, a=6$$

۱۴- فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی باشند به طوری که $AB = A^T + A + 1$. در این صورت کدام صحیح است؟

$$(1) \quad AB = I$$

$$(2) \quad AB = BA$$

$$(3) \quad \det(A) = \det(B) = 1$$

$$(4) \quad AB = AB^T$$

۱۵- فرض کنید G یک گروه متناهی و $H, K \leq G$. در این صورت:

$$(1) \quad |\langle H, K \rangle : K| = |H : H \cap K|$$

$$(2) \quad |G : H \cap K| = |G : H| |G : K|$$

$$(3) \quad |H : H \cap K| \geq |\langle H, K \rangle : K|$$

$$(4) \quad \text{اگر } G = \langle H, K \rangle \text{ آنگاه } |H : H \cap K| > \frac{1}{p} |G : K|$$

۱۶- فرض کنید G یک گروه بوده و برای هر $a, b \in G$ ، $(ab)^{1^0} = a^{1^0} b^{1^0}$. در این صورت کدام مورد صحیح نیست؟

(1) مشتق دوم G زیرگروه همانی است.

(2) $\{x^{1^1} \mid x \in G\}$ زیرگروه نرمال G است.

(3) $\{x^{1^0} \mid x \in G\}$ زیرگروه نرمال G است.

(4) مشتق $\{x^{1^0} \mid x \in G\}$ در G نرمال است.

$$17- \quad \frac{Q[x]}{(x^2 - x)} \text{ با کدام حلقه یکرخت است؟}$$

$$(1) \quad Q$$

$$(2) \quad Q \times \mathbb{Z}_2$$

$$(3) \quad Q \times Q$$

$$(4) \quad \frac{Q[x]}{(x^2)}$$

۱۸- کدام جفت از حلقه‌های زیر، یکرخت هستند؟

(۱) $\mathbb{R}, \mathbb{R}[x]$

(۲) $\mathbb{R}[x], \mathbb{R}[x, y]$

(۳) $\frac{\mathbb{Z}_7[x]}{(x^2)}, \frac{\mathbb{Z}_7[x]}{(x^2+1)}$

(۴) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}], \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$

۱۹- فرض کنید A و B به ترتیب برابر با تعداد اعضای خودتوان و اعضای یوچ توان در حلقه $\mathbb{Z}_{180}$ باشد. در این صورت حاصل $A + B$ کدام است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۱۴

(۳) ۱۲

(۴) ۱۶

۲۰- کدام یک از معادلات زیر در S_6 دارای جواب است؟

(۱) $a^{-1}(12)a = (34)(15)$

(۲) $a^{-1}(123)a = (125)(34)$

(۳) $(135)a = (34)(236)a$

(۴) $a^{-1}(12)(34)a = (56)(13)$

۲۱- تعداد زیرگروه‌های $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ چند است؟

(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۸

توجه: در سؤالات زیر همواره مدول‌ها یکانی هستند.

۲۲- $\mathbb{Z}$ -مدول زیر با کدامیک از $\mathbb{Z}$ -مدول‌های زیر یکرخت است؟

$(\mathbb{Z}_4 \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z})$

(۱) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$

(۲) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$

(۳) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$

(۴) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$

۲۳- فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی و یک‌دار باشد. اگر R حلقه آرئینی باشد، آنگاه کدام مورد صحیح نیست؟

- (۱) $J(R)$ یک ایده‌آل پوچ‌توان است.
- (۲) R دارای فقط تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال است.
- (۳) هر ایده‌آل R یک ایده‌آل اول R است.
- (۴) هر ایده‌آل اول R یک ایده‌آل ماکسیمال R است.

۲۴- کدام یک از گروه‌های آبلی زیر غیربدیهی (ناصفر) است؟

- (۱) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$
- (۲) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q)$ که در آن p و q اعداد اول متمایز هستند.
- (۳) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p^{\infty}, \mathbb{Q})$ که در آن p یک عدد اول است.
- (۴) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p[x], \mathbb{Z}_p)$ که در آن p یک عدد اول است.

۲۵- همهٔ مدول‌های زیر تصویری هستند، به جز:

- (۱) هر مدول خارج قسمتی از یک مدول آزاد
- (۲) هر مجموع مستقیم از مدول‌های تصویری
- (۳) هر جمع‌وند مستقیم از یک مدول تصویری
- (۴) هر $\mathbb{Z}$ - مدول متناهیاً تولید شده و خالی از تاب

۲۶- تعداد عناصر رادیکال جیکوبسن حلقه $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ c & 0 & f \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}_p \right\}$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۳
- (۳) ۹
- (۴) ۲۷

۲۷- فرض کنید R یک حوزه صحیح باشد و F و F' دو R - مدول آزاد باشند. اگر $x \in F$ و $x' \in F'$ و $x \neq 0$ در

این صورت کدام مورد صحیح است؟

- (۱) هر R - زیر مدول $F \otimes_R F'$ آزاد است.
- (۲) $F \otimes_R F'$ ممکن است آزاد نباشد.
- (۳) R - منومورفیزم (R هم‌ریختی یک‌به‌یک) $\varphi: F \rightarrow F'$ وجود دارد.
- (۴) $x \otimes x' \neq 0$ در $F \otimes_R F'$.

۲۸- فرض کنیم $R = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ و $R' = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$. کدام عبارت در مورد حلقه‌های R و R' صحیح است؟

- (۱) حلقه‌های R و R' هر دو نه‌نوتری و نه‌آرتینی هستند.
- (۲) حلقه‌های R و R' هر دو هم‌نوتری و هم‌آرتینی هستند.
- (۳) حلقه R نه‌نوتری و نه‌آرتینی است ولی حلقه R' آرتینی است ولی نه‌نوتری نیست.
- (۴) حلقه R نه‌نوتری و نه‌آرتینی است ولی حلقه R' نوتری است ولی آرتینی نیست.

- ۲۹- همه گزاره‌های زیر در مورد حلقه $M_2(\mathbb{R})$ صحیح‌اند، به جز:
- (۱) حداقل یک ایده‌آل چپ سره و غیرصفر دارد که ماکسیمال چپ نیست.
 - (۲) برای هر ایده‌آل چپ I مانند $I^2 = I$.
 - (۳) هر ایده‌آل چپ سره و غیرصفر آن، مینیمال است.
 - (۴) هر ایده‌آل چپ و غیرصفر آن شامل یک عضو پوچ‌توان غیر صفر است.
- ۳۰- فرض کنید $\phi: A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \phi$ یک دنباله دقیق از $\mathbb{Z}$ -مدول‌ها باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟
- (۱) اگر دنباله شکافته شود آنگاه C تصویری است.
 - (۲) اگر $B = \mathbb{Z}_p$ آنگاه دنباله شکافته می‌شود.
 - (۳) اگر $B \cong A \oplus C$ آنگاه دنباله شکافته می‌شود.
 - (۴) اگر $A = \mathbb{Z}$ و $C = \mathbb{Z}_p$ آنگاه $B \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$.
- ۳۱- گروه $\mathbb{Z}_p$ را به عنوان مدول انژکتیو (تزریقی) روی کدام یک از حلقه‌های زیر می‌توان با ضرب اسکالر غیربدیهی در نظر گرفت؟
- (۱) $\mathbb{Z}_p$
 - (۲) $\mathbb{Z}_p$
 - (۳) $\mathbb{Z}_p$
 - (۴) $\mathbb{Z}_p$
- ۳۲- در مورد هر حلقه یک‌دار با حداقل ۲ عضو، کدام گزینه صحیح است؟
- (۱) زیرحلقه‌ای غیر صفر دارد که آرینی است.
 - (۲) زیرحلقه‌ای غیرصفر دارد که نوتری است.
 - (۳) زیرحلقه‌ای غیرصفر دارد که میدان است.
 - (۴) زیرحلقه‌ای غیرصفر دارد که دامنه صحیح است.
- ۳۳- فرض کنید R یک حوزه صحیح باشد، در این صورت اگر F میدان کسرهای R باشد آنگاه با فرض نوتری بودن F به عنوان R -مدول کدام مورد صحیح است؟
- (۱) F انژکتیو و R غیرانژکتیو است. (به عنوان R -مدول)
 - (۲) F غیرانژکتیو و R انژکتیو است. (به عنوان R -مدول)
 - (۳) هم F و هم R انژکتیو هستند. (به عنوان R -مدول)
 - (۴) هر دو F و R غیرانژکتیو هستند. (به عنوان R -مدول)
- ۳۴- فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی باشد. کدام خانواده سیگما - جبر نیست؟
- (۱) $\{E \subseteq X \mid E^c \text{ متناهی است}\}$
 - (۲) $\{E \subseteq X \mid E^c \text{ نامتناهی است}\}$
 - (۳) $\{E \subseteq X \mid \text{حداکثر شماراست}\}$
 - (۴) $\{E \subseteq X \mid E^c \text{ نامتناهی است}\}$

۳۵- اگر m اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ و C مجموعه کانتور و D مجموعه اعداد اصم در بازه $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ باشد، مقدار

$$\int_C \sin x \, dm(x) + \int_D \cos x \, dm(x)$$

(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) ۲

۳۶- در مورد زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ با اندازه لبگ، کدام گزینه درست است؟

(۱) مرز هر مجموعه ناشمارا، اندازه پذیر است.

(۲) هر مجموعه ناشمارا دارای زیرمجموعه‌ای با اندازه مثبت است.

(۳) هر مجموعه ناشمارا دارای زیرمجموعه‌ای اندازه پذیر است.

(۴) خانواده‌ای ناشمارا از زیرمجموعه‌های دوبه‌دو مجزا و اندازه پذیر با اندازه مثبت در $[0, 1]$ وجود دارد.

۳۷- فرض کنید m اندازه لبگ بر $\mathbb{R}$ باشد. اگر $f:]0, \infty) \rightarrow]0, \infty)$ تابعی باشد که $f \circ m$ (ترکیب f و m) یک اندازه

است، در مورد f کدام گزینه درست است؟(۱) f صعودی است ولی لزوماً جمعی نیست.(۲) لزوماً f تابع همانی یا تابع ثابت است.(۳) f جمعی است ولی لزوماً پیوسته نیست.(۴) f جمعی و پیوسته است.

۳۸- $\mathbb{R}$ با اندازه لبگ و تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه معادل اندازه پذیری f نیست؟

(۱) برای هر زیرمجموعه فشرده A از $\mathbb{R}$ ، $f^{-1}(A)$ اندازه پذیر است.(۲) برای هر زیرمجموعه متناهی A از $\mathbb{R}$ ، $f^{-1}(A)$ اندازه پذیر است.(۳) برای هر عدد حقیقی a ، $f^{-1}((a, a+1))$ اندازه پذیر است.(۴) برای هر تابع اندازه پذیر $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، مجموعه $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq g(x)\}$ اندازه پذیر است.

۳۹- کدام گزینه درست است؟

(۱) ترکیب دو تابع اندازه پذیر لبگ، اندازه پذیر لبگ است.

(۲) ترکیب دو تابع اندازه پذیر لبگ، اندازه پذیر لبگ است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(۳) تابع تقریباً همه جا با تابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ برابر است.

(۴) اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتق کراندار باشد، هر مجموعه اندازه پذیر لبگ را به مجموعه‌ای اندازه پذیر لبگ تصویر می‌کند.

۴۰- بازه $[0, 1]$ با اندازه لبگ m و مجموعه $E = [0, \frac{1}{2}]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $f_n(x) = \begin{cases} \chi_E(x) & n \text{ فرد} \\ 1 - \chi_E(x) & n \text{ زوج} \end{cases}$

دنباله $\{f_n\}$ به طور نقطه‌وار همگرا و دنباله عددی $\left\{ \int_0^1 f_n dm \right\}$ همگرا

(۱) است، است.

(۲) نیست، است.

(۳) است، نیست.

(۴) نیست، نیست.

۴۱- $\mathbb{R}$ با اندازه لبگ را در نظر بگیرید. فرض کنید $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$. دنباله $\{f_n\}$ کدام گزینه

درست است؟

(۱) $f_n \rightarrow 0$ (در نرم L^2)، اما f_n (در اندازه).

(۲) $f_n \rightarrow 0$ (در نرم L^2) و $f_n \rightarrow 0$ (در اندازه).

(۳) f_n (در نرم L^2) و f_n (در اندازه).

(۴) $f_n \rightarrow 0$ (در اندازه)، اما f_n (در نرم L^2).

۴۲- بازه $[0, 1]$ با اندازه لبگ را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

(۱) $L^2[0, 1] \subseteq L^1[0, 1]$ و همگرایی در نرم L^2 همگرایی در نرم L^1 را نتیجه می‌دهد.

(۲) $L^1[0, 1] \subseteq L^2[0, 1]$ و همگرایی در نرم L^1 همگرایی در نرم L^2 را نتیجه می‌دهد.

(۳) $L^1[0, 1] \subseteq L^2[0, 1]$ و همگرایی در نرم L^2 همگرایی در نرم L^1 را نتیجه می‌دهد.

(۴) $L^2[0, 1] \subseteq L^1[0, 1]$ و همگرایی در نرم L^1 همگرایی در نرم L^2 را نتیجه می‌دهد.

۴۳- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی نامنفی انتگرال‌پذیر بر یک فضای اندازه (X, S, μ) باشد و

$$a_n = \int_X f_n d\mu$$

کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر $a_n \rightarrow 0$ ، آنگاه $f_n \rightarrow 0$ (تقریباً همه جا).

(۲) اگر $f_n \rightarrow 0$ (در اندازه) آنگاه $a_n \rightarrow 0$.

(۳) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه $f_n \rightarrow 0$ (تقریباً همه جا).

(۴) اگر $f_n \rightarrow 0$ (تقریباً همه جا)، آنگاه $a_n \rightarrow 0$.

۴۴- فرض کنید H یک فضای هیلبرت و x و y دو عضو متعامد ناصفر آن باشند. گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x - y\|^2 \quad (\text{الف})$$

(ب) x و y مستقل خطی هستند.

کدام گزینه درست است؟

(۱) (الف) و (ب) هر دو درست هستند.

(۲) (الف) درست است اما (ب) نادرست است.

(۳) (ب) درست است اما (الف) نادرست است.

(۴) (الف) و (ب) هیچ کدام درست نیستند.

۴۵- کدام گزینه معادل باناخ بودن فضای نرم‌دار X نیست؟

(۱) $L(X)$ ، فضای تمام عملگرهای خطی کراندار روی X (با نرم عملگری) باناخ است.

(۲) مجموعه $\{x \in X : \|x\| = 1\}$ با متر $d(x, y) = \|x - y\|$ کامل است.

(۳) هر سری همگرای مطلق در X همگرا است.

(۴) X^* ، فضای دوگان X ، باناخ است.

