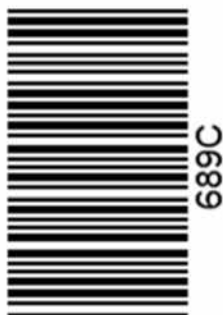


کد کنترل

689

C



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

«در زمینه مسائل علمی، باید دنبال قله بود.»
مقام معظم رهبری

عصر جمعه
۱۴۰۲/۱۲/۰۴

دفترچه شماره ۱۳ از ۳

آزمون ورودی دوره‌های دکتری (نیمه‌متمرکز) - سال ۱۴۰۳

ریاضی (کد ۲۲۳۳)

مدت زمان پاسخگویی: ۱۳۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۷۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤال‌ها

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مبانی علوم ریاضی - مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی - مبانی آنالیز ریاضی	۱۵	۱	۱۵
۲	مبانی آنالیز عددی - مبانی احتمال - بهینه‌سازی خطی	۱۰	۱۶	۲۵
۳	مبانی جبر - توپولوژی	۱۰	۲۶	۳۵
۴	آنالیز حقیقی ۱	۱۰	۳۶	۴۵
۵	جبر پیشرفته ۱	۱۰	۴۶	۵۵
۶	بهینه‌سازی خطی پیشرفته ۱ - آنالیز عددی پیشرفته	۱۰	۵۶	۶۵
۷	اصول آموزش ریاضی	۱۰	۶۶	۷۵

این آزمون، نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالها، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤالها و پایین پاسخنامه را تأیید می نمایم.

امضا:

مبانی علوم ریاضی - مبانی ماتریسها و جبر خطی - مبانی آنالیز ریاضی:

۱- مجموعه بازه های باز به صورت $\{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q} \cap (-1, 1)\}$ را که شمارا است به $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ نمایش

می دهیم. کدام گزینه درباره مجموعه $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} A_m$ درست است؟

$$(1) A = \emptyset$$

$$(2) A = (-1, 1)$$

$$(3) \sup A < 1 \text{ و } -1 < \inf A$$

$$(4) \sup A = 1 \text{ و } \inf A = -1 \text{ ولی } A \neq (-1, 1)$$

۲- گزاره منطقی زیر با کدام گزینه معادل (همارز)، نیست؟

$$\forall x (A(x) \Rightarrow \forall z \exists y B(x, y, z))$$

$$(1) \forall x (\neg A(x) \vee \forall z \exists y B(x, y, z))$$

$$(2) \forall y (A(y) \Rightarrow \forall z \exists x B(y, x, z))$$

$$(3) \forall u (A(u) \Rightarrow \exists y \forall z B(u, y, z))$$

$$(4) \forall t (\exists z \forall y \neg B(t, y, z) \Rightarrow \neg A(t))$$

۳- فرض کنید X یک مجموعه و F خانواده ای از زیرمجموعه های ناتهی X مجهز به رابطه ترتیبی شمول باشد به طوری که

$F \neq \emptyset$ و هر زیرمجموعه F دارای کران بالا و پایین در F است. رابطه \sim را روی X^X به صورت زیر تعریف می کنیم:

به ازای هر $f, g \in X^X$ و $f \sim g$ هرگاه $A \in F$ یافت شود که به ازای هر $a \in A$ ، $f(a) = g(a)$.

کدام گزینه درباره رابطه \sim ، درست است؟

(۱) رابطه \sim هم ارزی است.

$$(2) \forall f, g \in X^X (f \sim g \Leftrightarrow f \circ g \sim g \circ f)$$

$$(3) \forall f, g, h \in X^X (f \sim g \Leftrightarrow f \circ h \sim g \circ h)$$

(۴) به ازای هر تابع دوسویی $f \in X^X$ ، $f \sim f^{-1}$ اگر تنها اگر $x \in X$ موجود باشد که $f \circ f(x) = x$.

۴- فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع باشد. کدام گزینه با پوشا بودن تابع f معادل، نیست؟

$$(1) \forall B \subseteq Y: f(f^{-1}(B)) = B$$

$$(2) \forall A, B \subseteq Y: f^{-1}(A) = f^{-1}(B) \Leftrightarrow A = B$$

$$(3) \forall A, B \subseteq Y: f^{-1}(B \setminus A) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$$

(۴) به ازای هر $A, B \subseteq Y$ ، اگر $\{A, B\}$ افزایشی از Y باشد، آنگاه $\{f^{-1}(A), f^{-1}(B)\}$ افزایشی از X است.

- ۵- فرض کنید α, β و γ اعداد اصلی ترامتناهی هستند به طوری که $\beta < \gamma$. با پذیرش فرض پیوستار تعمیم یافته، کدام گزینه، درست است؟

$$(1) \alpha^\beta < \alpha^\gamma$$

$$(2) \beta + \alpha < \gamma + \alpha$$

$$(3) \beta^\alpha < \gamma^\alpha$$

$$(4) \gamma^\beta < \gamma^\gamma$$

- ۶- فرض کنید $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه $T(x, y, z) = (2x + 2y + z, -y + 4z, x + 2z)$ تعریف شده باشد. در این صورت برد T ، کدام است؟

$$(1) \{(x, y, z) \mid x - 2y + 2z = 0\}$$

$$(2) \{(x, y, z) \mid 2x + 4y - 2z = 0\}$$

$$(3) \{(x, y, z) \mid x + 2y - 2z = 0\}$$

$$(4) \{(x, y, z) \mid 2x + 2y - 5z = 0\}$$

- ۷- فرض کنید V فضایی برداری روی \mathbb{R} باشد و V_1 و V_2 دو زیرفضای برداری V ، به ترتیب، با بعدهای d_1 و d_2 باشند. اگر $W = \{u, u + u' : u \in V_1 \text{ و } u' \in V_2\}$ ، آن گاه بُعد W روی \mathbb{R} ، کدام است؟

$$(1) \min \{d_1, d_2\}$$

$$(2) d_1 + d_2$$

$$(3) \max \{d_1, d_2\}$$

$$(4) 2d_1 + d_2$$

- ۸- فرض کنید A و B ماتریس‌های غیرهمانی 4×4 روی میدان اعداد حقیقی باشند که $AB = A$ و $BA = B$. کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

$$(1) A^2 = A$$

$$(2) (A - B)^2 = 0$$

$$(3) B^2 = B$$

$$(4) (A + B)^2 = 0$$

- ۹- فرض کنید A و B ماتریس‌هایی $n \times n$ روی \mathbb{R} باشند به طوری که A و B و $A + B$ خودتوان باشند. در این صورت کدام گزاره نادرست است؟ (ماتریس M را خودتوان گوییم هرگاه $M^2 = M$ باشد).

$$(1) \text{tr}(AB) = 0$$

$$(2) AB = BA$$

$$(3) \text{tr}(BA + 3AB) = 0$$

$$(4) AB = -BA$$

۱۰- چند جمله‌ای مینیمال ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، کدام است؟

(۱) $(t-2)(t-3)$

(۲) $(t-2)(t-3)^2$

(۳) $(t-2)^2(t-3)$

(۴) $(t-2)^2(t-3)^2$

۱۱- دنباله بازگشتی $\{x_n\}$ را با ضابطه $x_1 = e$ و $x_{n+1} = 2 + \text{Log } x_n$ تعریف می‌کنیم. کدام مورد درباره دنباله $\{x_n\}$ درست است؟ (Log نماد لگاریتم طبیعی است.)

(۱) کراندار نیست.

(۲) یکنوا و کراندار است.

(۳) یکنوا نیست، ولی کوشی است.

(۴) $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$.

۱۲- فرض کنید $\{u_n\}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد حقیقی باشد که سری $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ همگراست. کدام مورد، نادرست است؟

(۱) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

(۲) $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 0$

(۳) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ همگرا است.

(۴) سری $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n)$ همگرا است.

۱۳- فرض کنید $f: (0, 1) \rightarrow [0, 1]$. کدام مورد، نادرست است؟

(۱) اگر f پیوسته باشد، آنگاه هر دنباله همگرا به نقطه‌ای در $(0, 1)$ را به یک دنباله همگرا می‌نگارد.

(۲) اگر f هر دنباله کوشی را به یک دنباله کوشی بنگارد، آنگاه f پیوسته است.

(۳) اگر f هر دنباله همگرا به نقطه‌ای در $(0, 1)$ را به یک دنباله همگرا بنگارد، آنگاه f پیوسته است.

(۴) اگر f پیوسته باشد، آنگاه هر دنباله کوشی را به یک دنباله کوشی می‌نگارد.

۱۴- فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتق مرتبه دوم مثبت باشد ($f'' > 0$) و $f(0) > 0$ ، $f(1) = 1$. کدام مورد، نادرست است؟

(۱) اگر $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ ، آنگاه $f'(1) > 1$.

(۲) اگر $f'(1) > 1$ ، آنگاه عضوی مانند $x \in (0, 1)$ وجود دارد که $f(x) = x$.

(۳) اگر $f'(1) > 1$ ، آنگاه برای هر $x \in (0, 1)$ ، $f'(x) \neq 1$.

(۴) اگر $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ ، آنگاه عضوی مانند $x \in (0, 1)$ وجود دارد که $f'(x) = 1$.

۱۵- تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را متناوب گوییم هرگاه عددی مانند $0 < p$ یافت شود، به طوری که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x+p) = f(x)$. فرض کنید f تابعی متناوب و پیوسته بر \mathbb{R} باشد. کدام مورد درباره تابع f درست است؟
 (۱) کراندار و مشتق پذیر است.
 (۲) کراندار و یکنواخت پیوسته است.
 (۳) کراندار است، ولی ممکن است یکنواخت پیوسته نباشد.
 (۴) یکنواخت پیوسته است، ولی ممکن است کراندار نباشد.

مبانی آنالیز عددی - مبانی احتمال - بهینه سازی خطی:

۱۶- دو عدد نامساوی $a = 0.21244 + a_6 \times 10^{-6}$ و $b = 0.21244 + b_6 \times 10^{-6}$ را در نظر بگیرید. اگر دقت ماشین 10^{-5} باشد، آنگاه از میان اعداد زیر، کوچکترین کران بالا برای خطای نسبی $a - b$ کدام است؟

$$(1) \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

$$(2) 0.43$$

$$(3) 4/3$$

$$(4) 4/5$$

۱۷- فرض کنید روش تکرار ساده $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ برای محاسبه ریشه حقیقی و ساده α از معادله $f(x) = 0$ با شرط $g(\alpha) \neq 0$ دارای مرتبه همگرایی حداقل ۳ باشد. اگر $f''(\alpha) = 0$ و f و g به اندازه کافی مشتق پذیر باشند، آنگاه g در کدام شرط باید صدق کند؟

$$(1) g(\alpha) + g'(\alpha) = \frac{3}{2} f''(\alpha)$$

$$(2) g(\alpha) = f'(\alpha)$$

$$(3) g'(\alpha) = \frac{1}{2} f''(\alpha)$$

$$(4) g''(\alpha) = f'(\alpha)$$

۱۸- تابع $f(x) = \cos x$ را در بازه $[0, 1]$ در نظر بگیرید. این بازه به حداقل چند زیربازه با طول گام مساوی افراز شود، به قسمی که اگر $f(x)$ در هر یک از این زیربازه‌ها به وسیله یک تابع خطی درون یابی شود، آنگاه خطای حاصل از

روش درون یابی از $\frac{1}{4} \times 10^{-4}$ بیشتر نباشد؟

$$(1) 20$$

$$(2) 35$$

$$(3) 40$$

$$(4) 50$$

- ۱۹- فرض کنید فرمول انتگرال گیری گاوسی ۴ نقطه‌ای برای تقریب $\int_a^b f(x)w(x)dx$ به کار گرفته می‌شود، که در آن w تابع وزن است. فرمول مورد نظر برای کدام یک از توابع داده شده، لزوماً دقیق نیست؟

$$(1) x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 1$$

$$(2) x(x^5 - 3x + 7)$$

$$(3) x^2(x^3 - x^2 + 1)$$

$$(4) x(x^2 + 1)$$

- ۲۰- اگر ۴ کتاب ریاضی از بین ۶ کتاب مختلف ریاضی و ۳ کتاب انگلیسی از بین ۵ کتاب مختلف انگلیسی انتخاب شوند، به چند روش می‌توان هفت کتاب انتخابی را در یک قفسه چید به طوری که یک کتاب ریاضی در ابتدای قفسه باشد؟

$$(1) \binom{5}{3} \times 6!$$

$$(2) \left(\frac{5!}{2!}\right) \times 6!$$

$$(3) \binom{5}{3} \times 6 \times 6!$$

$$(4) \left(\frac{5!}{2!}\right) \times 6 \times 6!$$

- ۲۱- برای هر دو پیشامد دلخواه و غیریکسان A و B از یک فضای احتمال، کدام مورد درست است؟ (A^c متمم پیشامد A است.)

$$(1) P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cap B)$$

$$(2) P(A) + P(B^c) \geq 1 + P(A \cup B^c)$$

$$(3) P(A^c) + P(B) \geq 1 + P(A^c \cap B)$$

$$(4) P(A) + P(B) \geq 1 + P(A \cup B)$$

- ۲۲- یک شرکت بیمه در حال مطالعه سه عامل مخاطره A و B و C در یک جامعه است. احتمال اینکه یک شخص در معرض عامل‌های A و B و نه C قرار گیرد $0/1$ و احتمال اینکه در معرض هر سه مخاطره باشد به شرط اینکه در معرض دو عامل

مخاطره A و B باشد برابر $\frac{2}{3}$ است. احتمال اینکه یک شخص در معرض هر سه عامل مخاطره باشد، کدام است؟

$$(1) 0/05$$

$$(2) 0/2$$

$$(3) 0/33$$

$$(4) 0/4$$

۲۳- فرض کنید جدول زیر، متناظر با یکی از تکرارهای الگوریتم سیمپلکس برای یک مسئله برنامه‌ریزی خطی مینیمم‌سازی است. با انتخاب چه مقادیری برای α_1 و α_2 ، جدول تکرار بعدی تباهیده (تبهن) است؟

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	۱	۷	۰	۰	۱	۰	
x_3	۰	۷					α_1
x_2	۰	-۱					α_2
x_5	۰	+۱					۲

$$(1) \alpha_1 = 1 \text{ و } \alpha_2 = 0$$

$$(2) \alpha_1 = 2 \text{ و } \alpha_2 = 2$$

$$(3) \alpha_1 = 7 \text{ و } \alpha_2 = 1$$

$$(4) \alpha_1 = 14 \text{ و } \alpha_2 = 1$$

۲۴- کدام مورد، درست است؟

(۱) هر مجموعه چندوجهی کران‌دار، نقطه رأسی دارد.

(۲) هر جواب بهینه یک مسئله برنامه‌ریزی خطی، یک نقطه رأسی است.

(۳) تعداد تکرارهای الگوریتم سیمپلکس، بزرگ‌تر یا مساوی تعداد نقاط رأسی ناحیه شدنی است.

(۴) تعداد تکرارهای الگوریتم سیمپلکس، کمتر یا مساوی تعداد نقاط رأسی ناحیه شدنی است.

۲۵- یک مسئله برنامه‌ریزی خطی استاندارد به صورت زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید نقاط رأسی و جهت‌های دور شونده

رأسی ناحیه شدنی را به ترتیب با x^1, x^2, x^3 و d^1, d^2 نمایش دهیم. اگر $c^T x^1 = 1$ و $c^T x^2 = -2$ و $c^T x^3 = -4$

$$\text{و } c^T d^1 = 1 \text{ و } c^T d^2 = 0$$

آن‌گاه کدام مورد درست است؟

$$\min z = c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

(۲) این مسئله، بی‌کران است.

(۴) مجموعه جواب‌های بهینه، تهی است.

(۱) ناحیه شدنی، تهی است.

(۳) مجموعه جواب‌های بهینه، بی‌کران است.

مبانی جبر - توپولوژی:

۲۶- فرض کنید گروه G تنها شامل یک زیرگروه نرمال نابدهی و سره N باشد. در این صورت کدام مورد برای گروه $\frac{G}{N}$ درست است؟

(۱) ساده و آبلی است.

(۲) لزوماً ساده نیست ولی آبلی است.

(۳) ساده است ولی لزوماً آبلی نیست.

(۴) نه لزوماً ساده است و نه لزوماً آبلی است.

۲۷- بزرگترین مرتبه یک عنصر در S_n (گروه تقارن‌های روی n حرف)، کدام است؟

$$(1) n$$

$$(2) \frac{n}{2}$$

$$(3) \frac{n+1}{2}$$

$$(4) \frac{n-1}{2}$$

۲۸- فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و M یک ایده‌آل ماکسیمال R باشد. در این صورت کدام مورد درباره ایده‌آل

$M \times M$ از $R \times R$ ، درست است؟

(۲) هم اول و هم ماکسیمال است.

(۴) اول است ولی ماکسیمال نیست.

(۱) نه اول و نه ماکسیمال است.

(۳) اول نیست ولی ماکسیمال است.

۲۹- فرض کنید G یک گروه ناآبلی باشد به طوری که گروه خودریختی‌های داخلی آن از مرتبه p^2 باشد که در آن p عددی اول است. در این صورت کدام مورد، درست است؟

$$(1) \quad Z(G) \subsetneq G'$$

$$(2) \quad G' \leq Z(G)$$

$$(3) \quad G = G'$$

$$(4) \quad \frac{G}{Z(G)} \text{ دوری است.}$$

۳۰- تعداد ایده‌آل‌های اول حلقه $\frac{\mathbb{Z}_{37}[t]}{\langle t^{1402} \rangle}$ ، برابر با کدام است؟

$$(1) \quad 1$$

$$(2) \quad 2$$

$$(3) \quad 1401$$

$$(4) \quad \text{بی‌نهایت}$$

۳۱- فرض کنید X یک فضای فشرده و هاوسدورف باشد. کدام مورد درست است؟

(۱) اگر X یک نقطه تنها داشته باشد، آن گاه X شماراست.

(۲) اگر X هیچ نقطه تنها نداشته باشد، آن گاه X ناشمارا است.

(۳) اگر تعداد نقاط تنهای X شمارای نامتناهی باشد، آن گاه X ناشمارا است.

(۴) اگر تعداد نقاط حدی X شمارای نامتناهی باشد، آن گاه X ناشمارا است.

۳۲- فرض کنید X فضای توپولوژیک باشد. گره‌های زیر را در نظر بگیرید.

(الف) X زیرمجموعه شمارا چگال دارد.

(ب) X پایه‌ای شمارا دارد.

کدام مورد درست است؟

(۱) اگر «الف»، آن گاه «ب» ولی عکس آن برقرار نیست. (۲) اگر «ب»، آن گاه «الف» ولی عکس آن برقرار نیست.

(۳) «الف» و «ب» معادل هستند. (۴) از هیچ‌یک دیگری نتیجه نمی‌شود.

۳۳- فرض کنید X, Y دوفضای توپولوژیک و توابع f, g از X به Y پیوسته باشند. کدام مورد درست است؟

(۱) $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ در X بسته است.

(۲) $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$ در $X \times X$ بسته است.

(۳) اگر Y فشرده باشد، آن گاه $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ در $X \times Y$ بسته است.

(۴) اگر Y مجموعه‌ای مرتب مجهز به توپولوژی ترتیبی باشد، آن گاه $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ در X بسته است.

۳۴- فرض کنید $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای نامتناهی از فضاهای توپولوژیک، $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ و τ یک توپولوژی روی X است که

برای هر $\alpha \in I$ نگاشت تصویری $\pi_\alpha : (X, \tau) \rightarrow X_\alpha$ پیوسته است. اگر p توپولوژی حاصلضربی روی X باشد، کدام

مورد درست است؟

(۱) توپولوژی p از توپولوژی τ ضعیف‌تر است و دو توپولوژی یکسان نیستند.

(۲) توپولوژی τ از توپولوژی p ضعیف‌تر است و دو توپولوژی یکسان نیستند.

(۳) دو توپولوژی τ و p روی X ممکن است قابل مقایسه نباشند.

(۴) دو توپولوژی τ و p روی X یکسان هستند.

۳۵- کدام مورد نادرست است؟

- (۱) \mathbb{R}^n با توپولوژی اقلیدسی، موضعاً فشرده است.
 (۲) هر زیرمجموعه بسته از یک فضای موضعاً فشرده، موضعاً فشرده است.
 (۳) مجموعه اعداد گویا با توپولوژی اقلیدسی، موضعاً فشرده است.
 (۴) هر زیرمجموعه باز از یک فضای موضعاً فشرده و هاوسدورف، موضعاً فشرده است.

آنالیز حقیقی ۱:

۳۶- فرض کنید X مجموعه‌ای ناشمارا، S سیگما جبر تولید شده توسط زیرمجموعه‌های یکانی X و μ یک اندازه روی

S است به طوری که برای هر $x \in X$ ، $\mu(\{x\}) = 0$. کدام گزینه درست است؟

- (۱) برای هر مجموعه‌ی ناشمارای $E \in S$ ، $\mu(E) = \infty$.
 (۲) برای هر $E \in S$ ، $\mu(E) = 0$ یا $\mu(E) = 1$.
 (۳) برای هر $E \in S$ ، $\mu(E) = \mu(X)$ یا $\mu(E^c) = \mu(X)$.
 (۴) $\mu(X) = \infty$ ولی مجموعه‌ی ناشمارای $E \in S$ وجود دارد که $\mu(E) < \infty$.
 ۳۷- فرض کنید $X = \{a, b, c\}$ و $S = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ یک سیگما جبر روی X باشد. اندازه μ روی S با ضابطه،
 $\mu(\emptyset) = 0$ ، $\mu(\{a\}) = 1$ ، $\mu(\{b, c\}) = 2$ و $\mu(X) = 3$ تعریف می‌شود. اگر μ^* اندازه خارجی متناظر با μ باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $\{b\}$ اندازه‌پذیر است ولی $\{a, b\}$ اندازه‌پذیر نیست و $\mu^*(\{b\}) = 2$ و $\mu^*(\{a, b\}) = 3$.
 (۲) $\{b\}$ و $\{a, b\}$ اندازه‌پذیر نیستند و $\mu^*(\{b\}) = 2$ و $\mu^*(\{a, b\}) = 3$.
 (۳) $\{b\}$ و $\{a, b\}$ اندازه‌پذیر نیستند و $\mu^*(\{b\}) = 1$ و $\mu^*(\{a, b\}) = 2$.
 (۴) $\{b\}$ و $\{a, b\}$ اندازه‌پذیر هستند و $\mu^*(\{b\}) = 1$ و $\mu^*(\{a, b\}) = 2$.

۳۸- برای دو مجموعه A و B در \mathbb{R} ، $A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\}$ ، A° درون A و λ اندازه لبگ است. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) اگر $E \subseteq [0, 1]$ و $(E - E)^\circ = \emptyset$ ، آنگاه E شمارا است.
 (۲) زیرمجموعه‌ای ناشمارا مانند E از بازه $[0, 1]$ موجود است که $(E - E)^\circ = \emptyset$.
 (۳) زیرمجموعه‌ای ناشمارا مانند E از بازه $[0, 1]$ وجود دارد که $(E - E)^\circ \neq \emptyset$.
 (۴) اگر $E \subseteq [0, 1]$ اندازه‌پذیر لبگ باشد و $\lambda(E) > 0$ ، آنگاه $(E - E)^\circ \neq \emptyset$.

۳۹- فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و دوسویی باشد. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) f هر مجموعه‌ی پوچ را به مجموعه‌ای پوچ می‌نگارد.
 (۲) f هر مجموعه‌ی بورل را به مجموعه‌ای بورل می‌نگارد.
 (۳) f^{-1} هر مجموعه‌ی بورل را به مجموعه‌ای بورل می‌نگارد.
 (۴) برای هر تابع اندازه‌پذیر $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f^{-1} \circ g$ اندازه‌پذیر است.

۴۰- فرض کنید λ اندازه لبگ، $f \in L^1([0, 1], \lambda)$ و $E = \{x \in [0, 1] : f(x) \in \mathbb{Z}\}$ ، که \mathbb{Z} نمایش مجموعه اعداد صحیح است. کدام گزینه درست است؟

(۱) امکان دارد که E اندازه پذیر لبگ نباشد.

(۲) مجموعه E اندازه پذیر لبگ است و $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |\cos(\pi f(x))|^n dx$ موجود نیست.

(۳) مجموعه E اندازه پذیر لبگ است و به ازای هر n ، $\int_0^1 |\cos(\pi f(x))|^n dx < \lambda(E)$.

(۴) مجموعه E اندازه پذیر لبگ است و $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |\cos(\pi f(x))|^n dx = \lambda(E)$.

۴۱- فرض کنید μ اندازه بورل متناهی روی $[0, 1]$ باشد و برای هر $n \in \mathbb{N}$ تابع $f_n(x) = x^n$ را بر $[0, 1]$ در نظر بگیرید. اگر $\delta > 0$ وجود داشته باشد که $\mu([1-\delta, 1]) = 0$ ، کدام مورد درست است؟

(۱) $\{f_n\}$ در اندازه به صفر میل نمی کند و $\{f_n\}$ در $L_\infty(\mu)$ به صفر میل نمی کند.

(۲) $f_n \rightarrow 0$ در اندازه μ ولی $\{f_n\}$ در $L_\infty(\mu)$ به صفر میل نمی کند.

(۳) $f_n \rightarrow 0$ در $L_\infty(\mu)$ ولی $\{f_n\}$ در اندازه به صفر میل نمی کند.

(۴) $f_n \rightarrow 0$ در $L_\infty(\mu)$ و $f_n \rightarrow 0$ در اندازه μ .

۴۲- از کدام گزینه نتیجه می شود که $\frac{1}{(f^2 + g^2)^{1/2}} \in L^1(\mu)$ است؟

(۱) $fg \in L^1(\mu)$.

(۲) f و $g \in L^2(\mu)$.

(۳) f و $g \in L^1(\mu)$.

(۴) f و g اندازه پذیر و کراندار باشند.

۴۳- فرض کنید (X, μ) یک فضای اندازه و $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع اندازه پذیر بر X باشد. اگر $g \in L^1(\mu)$ موجود باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $|f_n| \leq g$ ، آنگاه کدام گزینه درباره گزاره های «الف» و «ب»، درست است؟

الف) $f_n \rightarrow f$ در اندازه μ .

ب) $f_n \rightarrow f$ در $L^1(\mu)$.

(۱) «الف» \nRightarrow «ب» و «ب» \nRightarrow «الف».

(۲) «ب» \Leftarrow «الف» ولی «الف» \nRightarrow «ب».

(۳) «الف» \Leftarrow «ب» ولی «ب» \nRightarrow «الف».

(۴) «الف» \Leftrightarrow «ب».

۴۴- فرض کنید S زیرفضای برداری $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ است. S را به عنوان زیرفضایی از $(L^2[0, 1], \|\cdot\|_2)$ نیز در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

(۱) برای هر $f \in S$ ، $\|f\|_\infty \leq M \|f\|_2$ ، عددی مانند M وجود دارد.

(۲) اگر S در $L^2[0, 1]$ بسته باشد، آنگاه دو نرم $\|\cdot\|_\infty$ و $\|\cdot\|_2$ روی S معادلند.

(۳) $(S, \|\cdot\|_2)$ فضای باناخ است اگر و فقط اگر $(S, \|\cdot\|_\infty)$ فضای باناخ باشد.

(۴) همواره $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$ و اگر $(S, \|\cdot\|_\infty)$ بسته باشد، آنگاه S در $L^2[0, 1]$ بسته است.

- ۴۵- فرض کنید X یک فضای باناخ و Y زیرفضای چگال X است و نگاشت $T: X^* \rightarrow Y^*$ را با ضابطه $T(\Lambda) = \Lambda|_Y$ در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟ $\Lambda|_Y$ تحدید تابع $\Lambda \in X^*$ به فضای Y است.
- (۱) T دوسویی و حافظ نرم است. (۲) T دوسویی است ولی حافظ نرم نیست.
- (۳) T یک به یک است ولی پوشا نیست. (۴) T پوشا است ولی یک به یک نیست.

جبر پیشرفته ۱:

- ۴۶- اگر R یک حلقه یکدار باشد و M و N به ترتیب R -مدول هایی نوتری و آرتینی باشند. در این صورت کدام مورد صحیح است؟
- (۱) M متناهی مولد است ولی N لزوماً متناهی مولد نیست.
- (۲) M لزوماً متناهی مولد نیست ولی N متناهی مولد است.
- (۳) هر دو متناهی مولد هستند.
- (۴) هیچ کدام متناهی مولد نیستند.
- ۴۷- کدام مورد در خصوص $\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$ صحیح نادرست است؟
- (۱) یک \mathbb{Z} -مدول نوتری است. (۲) یک \mathbb{Z}_5 -مدول آزاد است.
- (۳) یک \mathbb{Z}_5 -مدول نوتری است. (۴) یک \mathbb{Z} -مدول آزاد است.
- ۴۸- کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟ (Q ، مجموعه اعداد گویا است).
- (۱) $Q \otimes Q \cong \langle \circ \rangle$ (۲) $\mathbb{Z}_3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_3$
- (۳) $\mathbb{Z}_5 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_6 \cong \langle \circ \rangle$ (۴) $\mathbb{Z}_5 \otimes_{\mathbb{Z}} Q \cong \langle \circ \rangle$
- ۴۹- فرض کنید R حلقه ای جابه جایی و یکدار باشد و M یک R -مدول پروژکتیو (تصویری) باشد که توسط عنصر m_0 تولید می شود. در این صورت کدام حکم در مورد R -مدول $A = \{r \in R \mid rm_0 = 0\}$ صحیح است؟
- (۱) لزوماً دوری نیست ولی پروژکتیو است. (۲) دوری و پروژکتیو است.
- (۳) دوری است ولی لزوماً پروژکتیو نیست. (۴) نه لزوماً دوری و نه لزوماً پروژکتیو است.
- ۵۰- کدام مورد در خصوص $\frac{\mathbb{Z}_{17}[t]}{\langle t^{100} \rangle}$ صحیح است؟
- (۱) حلقه ای موضعی و آرتینی است. (۲) حلقه ای موضعی و غیر آرتینی است.
- (۳) حلقه ای غیر موضعی و آرتینی است. (۴) حلقه ای غیر موضعی و غیر آرتینی است.
- ۵۱- فرض کنید R حلقه ای یکدار و $J(R)$ رادیکال جیکوسن R باشد. اگر $x \in J(R)$ را بتوان به صورت $x = a + b$ نوشت که در آن a یک عضو پوچ توان است و عدد طبیعی $n > 1$ موجود است که $b = b^n$ ، آن گاه کدام مورد درست است؟
- (۱) $a = 0$ (۲) $b = 0$
- (۳) $x = 0$ (۴) هیچ کدام
- ۵۲- کدام حکم در مورد حلقه $\frac{\mathbb{Z}_6[x]}{2\mathbb{Z}_6[x]}$ درست است؟
- (۱) نه متناهی و نه نوتری است. (۲) هم متناهی و هم نوتری است.
- (۳) متناهی است ولی نوتری نیست. (۴) متناهی نیست ولی نوتری است.

۵۳- رادیکال ایده آل I را در حلقه اعداد صحیح \mathbb{Z} با $\text{Rad}(I)$ نشان می‌دهیم. کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

- (۱) $\text{Rad}(\langle 5 \rangle) = \langle 5 \rangle$ (۲) $\text{Rad}(\langle 45 \rangle) = \langle 45 \rangle$
 (۳) $\text{Rad}(\langle 72 \rangle) = \langle 6 \rangle$ (۴) $\text{Rad}(\langle 16 \rangle) = \langle 4 \rangle$

۵۴- کدام یک از $\mathbb{Z}_p[X]$ - مدول‌های زیر با $\left(\frac{\mathbb{Z}_p[X]}{\langle X^{100} \rangle} \right)$ و $\left(\frac{\mathbb{Z}_p[X]}{\langle X^{200} \rangle} \right)$ $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[X]}$ یکرخت است؟

- (۱) صفر
 (۲) $\frac{\langle X^{100} \rangle}{\langle X^{200} \rangle}$
 (۳) $\frac{\langle X \rangle}{\langle X^{200} \rangle}$
 (۴) $\frac{\mathbb{Z}_p[X]}{\langle X^{200} \rangle}$

۵۵- حلقه جابه‌جایی و یک‌دار R و مدول‌های A, B, C و D روی R مفروض هستند. کدام گزاره همواره درست است؟

- (۱) اگر $A \otimes_R B \cong 0$ ، آنگاه $A \cong 0$ یا $B \cong 0$.
 (۲) اگر $A \otimes_R B$ ساده باشد، آنگاه $A \cong 0$ یا $B \cong 0$.
 (۳) اگر Λ ساده باشد، آنگاه $\Lambda \otimes_R \Lambda \cong \Lambda$.
 (۴) اگر $A \leq C$ و $B \leq D$ ، آنگاه $A \otimes_R B \leq C \otimes_R D$.

بهبودسازی خطی پیشرفته ۱ - آنالیز عددی پیشرفته:

۵۶- کدام مورد، درست است؟

- (۱) در هر جدول سیمپلکس معمولی، شدنی بودن مسئله دوگان برقرار است.
 (۲) در هر جدول سیمپلکس دوگان، شدنی بودن مسئله اولیه همواره برقرار است.
 (۳) در هر جدول سیمپلکس، شرایط مکمل زائد همواره برقرار است.
 (۴) فقط در جدول بهینه روش سیمپلکس، شرایط مکمل زائد برقرار است.
 ۵۷- اگر مسئله برنامه‌ریزی خطی (۱) مقدار بهینه متناهی داشته باشد، آنگاه در مسئله (۲)، کدام مورد درست است؟

$$(1) \begin{cases} \min z = c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \min z = c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

- (۱) نشدنی است. (۲) یا بی‌کران است یا نشدنی.
 (۳) مقدار بهینه متناهی دارد. (۴) یا مقدار بهینه متناهی دارد یا نشدنی است.

۵۸- فرض کنید دستگاه زیر، دارای جواب باشد. کدام مورد، درست است؟

$$\begin{cases} A^T v = c \\ v \geq 0 \end{cases}$$

- (۱) $Ax \leq 0 \Rightarrow c^T x \leq 0$ (۲) $Ax \geq 0 \Rightarrow c^T x \leq 0$
 (۳) $Ax \leq 0 \Rightarrow c^T x = 0$ (۴) دستگاه $Ax \leq 0$ ، $c^T x > 0$ جواب دارد.

۵۹- فرض کنید جدول زیر متناظر با یکی از تکرارهای مرحله (فاز) اول روش دومرحله‌ای (دوفازی) برای حل یک مسئله استاندارد است. s_i متغیر کمکی قید i -ام و R_i متغیر مصنوعی آن است. مقدار $\alpha + \beta$ کدام است؟

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	RHS
	۱	α	۰	-۱	$\frac{1}{3}$			(۱) -۱
Z	۱	α	۰	-۱	$\frac{1}{3}$			(۲) $-\frac{2}{3}$
R_1	۰	$\frac{5}{3}$	۰	β	$\frac{1}{3}$			(۳) $\frac{2}{3}$
x_2	۰	$\frac{1}{3}$	۱	۰	$-\frac{1}{3}$			(۴) ۱

۶۰- مسئله (P) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \\ (1) \sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, i = 1, \dots, m \\ (2) \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

فرض کنید u_i ها متغیرهای دوگان مربوط به قیود (۱) و v_j ها متغیرهای دوگان مربوط به قیود (۲) هستند. جواب‌های شدنی x برای (P) و (u, v) برای دوگان (P) در کدام مورد، بهینه هستند؟

$$u_i + v_j = c_{ij} \Rightarrow x_{ij} > 0 \quad (1)$$

$$x_{ij} = 0 \Rightarrow u_i + v_j < c_{ij} \quad (2)$$

$$u_i + v_j > c_{ij} \Rightarrow x_{ij} = 0 \quad (3)$$

$$u_i + v_j \neq c_{ij} \Rightarrow x_{ij} = 0 \quad (4)$$

۶۱- کدام مورد، درست است؟

(۱) اگر الگوریتم سیمپلکس از هیچ جواب پایه‌ای شدنی تباهیده‌ای (تبهگنی) عبور نکند، به دور نمی‌افتد.

(۲) قاعده ممانعت دوری بلند، نمی‌تواند از وقوع دور در مسائل تباهیده (تبهگن) جلوگیری کند.

(۳) اگر جواب پایه‌ای شدنی آغازین در الگوریتم سیمپلکس، تباهیده نباشد، جواب‌های پایه‌ای شدنی بعدی نیز تباهیده نیستند.

(۴) اگر در هر تکرار الگوریتم سیمپلکس، مقدار مینیمم در آزمون مینیمم کسر، به‌طور منحصربه‌فرد رخ دهد، این الگوریتم

به دور می‌افتد.

۶۲- در یک دستگاه ممیز شناور نرمال شده، برای نمایش اعداد حقیقی در مبنای ۴ با ۶ رقم در مانتیس از روش بریدن (قطع کردن) در نمایش اعداد استفاده می‌شود. فاصله بین عدد ۳۱ (در مبنای ۱۰) و نزدیک‌ترین عدد قابل نمایش بزرگ‌تر از آن، کدام است؟

$$\frac{1}{64} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{32} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{16} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۴)$$

۶۳- اگر $S(x)$ یک تابع اسپلاین مکعبی به صورت زیر باشد، آنگاه کدام تساوی برای ثابت‌های c و d ، درست است؟

$$S(x) = \begin{cases} 4 - \frac{11}{4}x + cx^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - \frac{1}{2}(x-1) + d(x-1)^2 - \frac{3}{4}(x-1)^3 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$cd = 3 \quad (۱)$$

$$c + d = 4 \quad (۲)$$

$$c + d = 3 \quad (۳)$$

$$cd = 4 \quad (۴)$$

۶۴- فرض کنید $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x$ چندجمله‌ای برنولی درجه سوم باشد. چندجمله‌ای $B_4(x)$ ، کدام است؟

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + \frac{1}{30} \quad (۱)$$

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \quad (۲)$$

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - \frac{1}{30} \quad (۳)$$

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - \frac{1}{30} \quad (۴)$$

۶۵- چندجمله‌ای‌های هرمیت که به صورت بازگشتی $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ ،

$H_0(x) = 1$ و $H_1(x) = 2x$ به ازای $n = 1, 2, \dots$ تعریف می‌شوند، نسبت به تابع وزن $\omega(x) = e^{-x^2}$ در \mathbb{R} متعامدند. اگر فرمول سه نقطه‌ای کوادراتور گاوس-هرمیت را به صورت

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) f(x) dx \approx \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$$

کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$1 \quad (۳)$$

$$3 \quad (۴)$$

اصول آموزش ریاضی:

- ۶۶- در روان‌شناسی آموزش ریاضی، پیش‌نیازهای ضروری برای ایجاد «درک رابطه‌ای» که ریچارد اسکمپ معرفی کرده، کدام است؟
 (۱) درگیر شدن شخصی یادگیرنده با اشیاء، موقعیت‌ها، مسئله‌ها و ایده‌های ریاضی
 (۲) استفاده از رویه‌های ریاضی برای حل مسئله
 (۳) درک قواعد، قضیه‌ها و کاربردهای آنها
 (۴) مدل‌سازی ریاضی
- ۶۷- ویژگی اصلی ریاضی پیش‌دبستانی تا پایهٔ نهم، کدام است؟
 (۱) استدلال ریاضی
 (۲) توسعهٔ تفکر ریاضی
 (۳) آموزش مفاهیم پایهٔ ریاضی
 (۴) ریاضی به‌عنوان یکی از ارکان سواد عمومی
- ۶۸- دو مؤلفهٔ معرفی‌شده توسط آلن بیشاپ برای برنامه درسی ریاضی کدامند؟
 (۱) سنت‌ها و تاریخ‌های ریاضی
 (۲) فرهنگ و ارزش‌ها در ریاضی
 (۳) فرهنگ و سنت‌های ریاضی
 (۴) دست‌سازها و مفاهیم در ریاضی
- ۶۹- پنج بُعد نظریه «تدریس قدرتمند ریاضی» شونفیلد کدامند؟
 (۱) محتوای ریاضی، مطالبهٔ شناختی، مشاهدهٔ کلاسی، عاملیت - مالکیت - هویت، ارزشیابی مستمر
 (۲) عدالت آموزشی، مطالبهٔ شناختی، دسترسی عادلانه به محتوا، عاملیت - مالکیت - هویت، ارزشیابی مستمر
 (۳) محتوای ریاضی، مطالبهٔ شناختی، دسترسی عادلانه به محتوا، عاملیت - مالکیت - هویت، ارزشیابی مستمر
 (۴) محتوای ریاضی، مطالبهٔ شناختی، دسترسی عادلانه به محتوا، کار گروهی در کلاس، ارزشیابی مستمر
- ۷۰- هوش مصنوعی، چه رویکرد جدیدی در تدریس ریاضی ایجاد کرده است؟
 (۱) آموزش ترکیبی
 (۲) ارزشیابی برخط
 (۳) تدریس معکوس
 (۴) توجه به آموزش فردی
- ۷۱- دو سازمان اصلی آموزش ریاضی در سطح جهانی کدامند؟
 (۱) کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی (ICME)، کنگره بین‌المللی ریاضی‌دان‌ها (ICM)
 (۲) کنگره بین‌المللی ریاضی‌دان‌ها (ICM)، گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی (PME)
 (۳) اتحادیه بین‌المللی ریاضی (IMU)، سازمان آموزشی - علمی - فرهنگی ملل متحد (UNESCO)
 (۴) گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی (PME)، کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی (ICMI)
- ۷۲- عامل اصلی تأسیس رشته آموزش ریاضی در جهان، چه بود؟
 (۱) سیاست
 (۲) توسعهٔ علم ریاضی
 (۳) توسعهٔ آموزش عالی
 (۴) تأسیس نظام‌های رسمی آموزشی
- ۷۳- ماهیت «اصول» در آموزش ریاضی چیست؟
 (۱) نسبی
 (۲) قطعی
 (۳) شخصی
 (۴) سازمانی
- ۷۴- ویژگی نظریهٔ «آموزش ریاضی واقعیت‌مدار» که به آن «آموزش ریاضی انسانی» گفته می‌شود، کدام است؟
 (۱) ارتباط افقی و عمودی محتوا
 (۲) زمینه‌های قابل فهم برای دانش‌آموز
 (۳) تجرید ریاضی
 (۴) مدل‌سازی
- ۷۵- تفکر محاسباتی که از اهداف آموزش ریاضی در دوران معاصر است، به ترتیب شامل کدام چهار گام زیر است؟
 (۱) تفکر الگوریتمی - تجزیه - تشخیص الگو - استخراج اطلاعات
 (۲) تشخیص الگو - استخراج اطلاعات - تجزیه - تفکر الگوریتمی
 (۳) تجزیه - تشخیص الگو - استخراج اطلاعات - تفکر الگوریتمی
 (۴) استخراج اطلاعات - تجزیه - تشخیص الگو - تفکر الگوریتمی

