



جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان
معاونت دانش پژوهان جوان



مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان
و دانش پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «نام خشتی (ره)»

اینجانب (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۰ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب (منشی حوزه) تعداد برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

دفترچه سوالات سی و پنجمین دوره المپیاد ریاضی - روز دوم

تاریخ: ۱۳۹۶/۲/۱ - ساعت: ۸:۳۰ مدت: ۲۷۰ دقیقه



شماره صندلی

بانک مقالات ایران
مرکز دانش و مقالات
علمی و پژوهشی و
سوالات آزمون ها

www.edub.ir

شماره پرونده:

کد ملی:

نام پدر:

نام مدرسه:



حوزه:

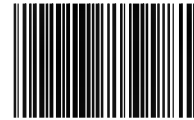
توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

- ۱- این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود. بنابراین از مجاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- ۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما هم خوانی ندارد. بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- ۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید. به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- ۴- با توجه به آن که برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است. امکان ارائه هیچ گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس. حل کرده و آن گاه در پاسخ نامه پاک نویس نمایید.
- ۵- عملیات تصحیح توسط مصححین. پس از قطع سربرگ. به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هر گونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد. خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- ۶- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید. در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- ۷- همراه داشتن هر گونه کتاب. جزوه. یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه. ساعت هوشمند. دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکند یا خاموش باشد. تقلب محسوب خواهد شد.
- ۸- شرکت کنندگان در دوره تالیستانی از بین دانش آموزان پایه دهم و سوم متوسطه انتخاب می شوند.
- ۹- بارم هر سوال ۷ نمره است.



نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:



۴) گیریم x و y دو عدد حقیقی مثبت و متمایز باشند که $x^4 - y^4 = x - y$. ثابت کنید:

$$\frac{x - y}{x^6 - y^6} \leq \frac{4}{3}(x + y).$$

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:



۵) پنج کودک باهوش دور میزی دایره‌ای نشسته‌اند. مربی تعدادی سیب را بین آن‌ها تقسیم می‌کند و می‌گوید: «من به برخی از شما تعدادی سیب داده‌ام و تعداد سیب هیچ دو نفری برابر نیست. هر کس علاوه بر این که تعداد سیب‌های خودش را می‌داند، سیب‌های دو نفری که در چپ و راستش هستند را هم می‌بیند.» سپس او تعداد کل سیب‌ها را اعلام می‌کند و از هر کس می‌خواهد که اختلاف تعداد سیب دو نفر روبه‌رویی خود را بگوید.

الف. ثابت کنید اگر تعداد سیب‌ها کم‌تر از ۱۶ باشد، دست‌کم یکی از کودکان می‌تواند با استدلال جواب درست را به‌دست آورد.

ب. نشان دهید اگر تعداد سیب‌ها ۱۶ باشد، مربی می‌تواند سیب‌ها را طوری تقسیم کند که هیچ کودکی نتواند جواب سؤال مربی را با اطمینان بفهمد.

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

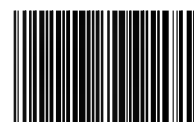
مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:



۶) X را نقطه‌ای متغیر روی دایره محیطی مثلث ABC می‌گیریم. از X بر AB و AC دو عمود رسم می‌کنیم تا خط گذرنده از BC را به ترتیب در P و Q قطع کنند. مرکز دایره گذرنده از X ، P و Q را Y می‌نامیم. (اگر X ، P و Q بر هم منطبق باشند همان نقطه را Y می‌گیریم.)

الف. ثابت کنید اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، با تغییر X روی دایره محیطی، Y روی یک دایره حرکت می‌کند.

ب. عکس قسمت الف را ثابت کنید: اگر با تغییر X روی دایره محیطی، Y روی یک دایره حرکت کند، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد

به نام او

در ادامه، راه حل سؤال های آزمون مرحله دوم سی و پنجمین المپیاد ریاضی آمده است. در این مورد لازم است به چند نکته اشاره شود:

۱. از نظر کمیته علمی المپیاد ریاضی راه حل های این سؤالات محدود به این ها نیست و هر راه حل درستی مورد قبول قرار خواهد گرفت.

۲. کمیته علمی المپیاد ریاضی و تیم مصحح هر سؤال، تا قبل از شروع تصحیح برگه ها و در طول تصحیح تلاش خواهند کرد راه حل های دیگر را نیز شناسایی کنند و در بارم بندی به آن ها توجه داشته باشند.

۳. آن چه در ادامه می آید ممکن است در بیان برخی جزئیات کامل نباشد زیرا هدف این است که دبیران و دانش آموزان عزیز با کلیات راه حل ها آشنا شوند و اگر راه حل دیگری دارند آن را به اطلاع کمیته علمی المپیاد ریاضی برسانند.

۴. لطفاً اگر می خواهید راه حل جدیدی ارسال کنید، آن را بادقت و منظم بنویسید. حتماً راه حل های موجود را مطالعه فرمایید و از فرستادن راه حل تکراری اجتناب کنید.

با تشکر،

کمیته علمی المپیاد ریاضی

اردیبهشت ۱۳۹۶

۴. گیریم x و y دو عدد حقیقی مثبت و متمایز باشند که $x^4 - y^4 = x - y$. ثابت کنید:

$$\frac{x - y}{x^6 - y^6} \leq \frac{4}{3}(x + y).$$

راه حل:

می‌دانیم

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 1 \Rightarrow (x^2 + y^2)(x + y) = 1$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &\geq \frac{3}{4} \frac{(x - y)}{x + y} \\ \Leftrightarrow x^6 - y^6 &\geq \frac{3}{4} (x^2 + y^2)(x - y) \\ \Leftrightarrow x^6 - y^6 &\geq \frac{3}{4} (x^2 + y^2)(x^4 - y^4) \\ \Leftrightarrow x^6 - y^6 &\geq -3x^2y^4 + 3x^4y^2 \\ \Leftrightarrow x^6 - y^6 &\geq 3x^2y^2(x^2 - y^2) \\ \Leftrightarrow x^4 + x^2y^2 + y^4 &\geq 3x^2y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - y^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

در نتیجه نابرابری مورد نظر برقرار است.

۵. پنج کودک باهوش دور میزی دایره ای نشسته اند. مربی تعدادی سیب را بین آن ها تقسیم می کند و می گوید: «من به برخی از شما تعدادی سیب داده ام و تعداد سیب هیچ دو نفری برابر نیست. هر کس علاوه بر این که تعداد سیب های خودش را می داند، سیب های دو نفری که در چپ و راستش هستند را هم می بیند.» سپس او تعداد کل سیب ها را اعلام می کند و از هر کس می خواهد که اختلاف تعداد سیب دو نفر روبه رویی خود را بگوید.

الف. ثابت کنید اگر تعداد سیب ها کم تر از ۱۶ باشد، دست کم یکی از کودکان می تواند با استدلال جواب درست را به دست آورد.

ب. نشان دهید اگر تعداد سیب ها ۱۶ باشد، مربی می تواند سیب ها را طوری تقسیم کند که هیچ کودکی نتواند جواب سؤال مربی را با اطمینان بفهمد.

راه حل:

الف) فرض می کنیم هیچ کودکی نتواند با استدلال جواب سؤال مذکور را بدهد و مجموع تعداد سیب ها دست کم ۱۶ است و به تناقض می رسیم.

لم) ثابت می کنیم جمع تعداد سیب های هر دو کودک مجاور دست کم ۵ است. اولاً جمع تعداد سیب های دو کودک مجاور ۱ نیست چرا که تنها حالت ممکن ۰ سیب و ۱ سیب است و تفاضل یکتا مشخص می شود.

اگر جمع ۲ باشد نیز تنها حالت ۰ و ۲ ممکن است، زیرا تعداد سیب های هیچ دو کودکی برابر نیست. اگر جمع تعداد سیب های دو کودک مجاور ۳ باشد با توجه به این که تنها دو حالت $\{0, 3\}$ یا $\{1, 2\}$ ممکن است رخ داده باشد، پس تعداد سیب های کودکان دیگر نباید از اعضای مجموعه $\{0, 1, 2, 3\}$ باشد. پس جمع کل دست کم برابر با $3 + 4 + 5 + 6$ یعنی ۱۸ است که از ۱۶ بیش تر می شود.

به طور مشابه اگر جمع تعداد سیب های دو کودک مجاور ۴ باشد دو حالت داریم. پس تعداد سیب بقیه از مجموعه $\{0, 1, 3, 4\}$ نیست. پس جمع کل دست کم $4 + 5 + 6 + 7 = 17$ و از ۱۶ بیش تر است. پس جمع تعداد سیب های هر دو کودک مجاور دست کم ۵ است. (لم اثبات شد.)

اگر ثابت کنیم یکی از کودکان دست کم ۶ سیب دارد مسأله حل می شود زیرا چهار نفر دیگر دو تا دو تا مجاورند پس طبق لم مجموعاً دست کم ۱۰ سیب دارند و تعداد کل سیب ها ۱۶ یا بیش تر خواهد شد. اگر کودکی بدون سیب وجود داشته باشد طبق لم کودکان مجاورش باید ۵ و ۶ سیب داشته باشند که نتیجه مورد نظر ما را می دهد. لذا کافی است حالتی که تعداد سیب ها $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ است را رد کنیم.

ابتدا توجه کنید در چینش این اعداد دور میز، ۱ باید مجاور ۴ و ۵ باشد که می دانیم $4 + 1 = 5$ و تنها حالات $\{0, 5\}$ و $\{2, 3\}$ می ماند که چون ۵ آمده $\{2, 3\}$ نمی توانند بیایند، پس تناقض است و در نتیجه حکم مسأله ثابت شد.

ب) مثال $\{1, 4, 3, 2, 6\}$ جواب است چرا که جمع مجاورها ۷، ۸، ۵، ۷ و ۵ است. هر کدام از دو عدد مجاور، از نظر کودک روبه رویی می توانست یکی صفر و دیگری جمعشان باشد. مثلاً $\{4, 3\}$ می توانست $\{0, 7\}$ باشد. (توجه کنید که $\{0, 5, 7, 8\}$ در مجموعه اعداد روی دایره ظاهر نشده است.)

راه حل سؤال های آزمون مرحله دوم سی و پنجمین المپیاد ریاضی ایران

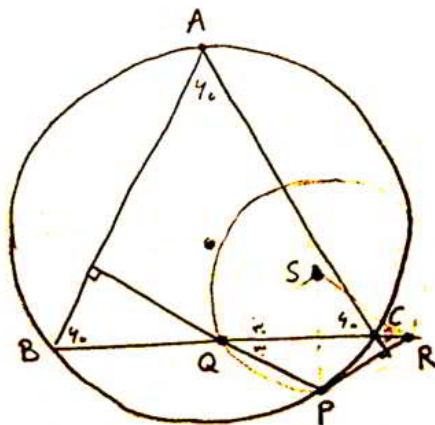
۶. X را نقطه ای متغیر روی دایره محیطی مثلث ABC می گیریم. از X بر AB و AC دو عمود رسم می کنیم تا خط گذرنده از BC را به ترتیب در P و Q قطع کنند. مرکز دایره گذرنده از X ، P و Q را Y می نامیم. (اگر X ، P و Q بر هم منطبق باشند همان نقطه را Y می گیریم).

الف. ثابت کنید اگر مثلث ABC متساوی الاضلاع باشد، با تغییر X روی دایره محیطی، Y روی یک دایره حرکت می کند.

ب. عکس قسمت الف را ثابت کنید: اگر با تغییر X روی دایره محیطی، Y روی یک دایره حرکت کند، مثلث ABC متساوی الاضلاع است.

راه حل:

الف) چون مثلث متساوی الاضلاع است، Q و R هر دو 30° درجه هستند و در نتیجه $PQ = PR$. فرض کنید S مرکز دایره محیطی مثلث PQR باشد.

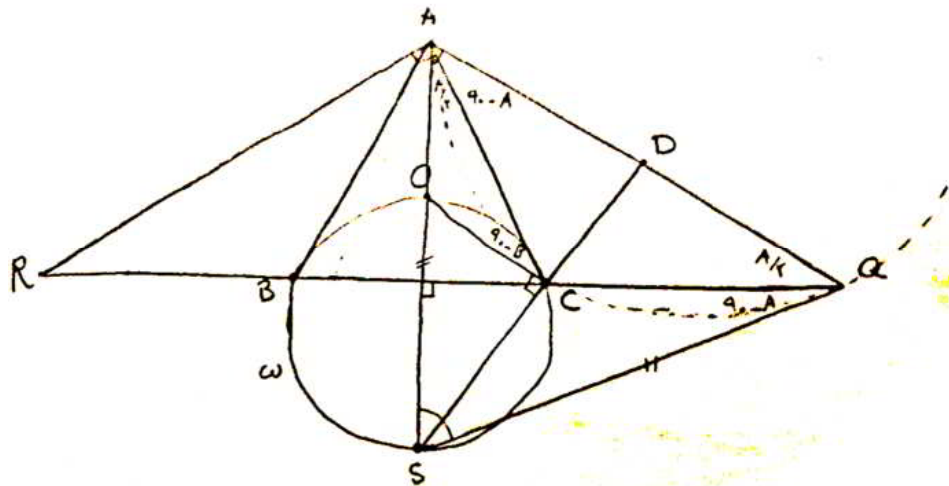


داریم $\widehat{QPR} = 120^\circ - 2 \times 30^\circ$ در نتیجه اندازه کمان QR برابر 120° درجه است و لذا $\widehat{QSR} = 120^\circ$.

چون $SQ = SR$ پس $\angle SQR$ و $\angle SRQ$ هر دو 30° درجه هستند. پس مثلث های PQR و SQR نسبت به BC قرینه اند پس S قرینه P نسبت به BC است و حکم ثابت می شود.

ب) اگر P روی B یا C باشد به وضوح S مرکز دایره محیطی PQR روی B و C می افتد. اکنون اگر P روبه رو قطری A باشد S روی O قرار می گیرد. حال از روبه رو قطری A موازی BC رسم می کنیم و تقاطع آن با BC را P می گیریم. در این صورت مثلث PQR با حالت قبل متشابه بوده و انتقال یافته آن به موازات BC است در نتیجه مرکز این دایره نیز انتقال یافته O با بردار PP' است. اما واضح است که B و C و O و S روی یک دایره نیستند مگر این که PP' طول آن ها صفر باشد، که یعنی مثلث ABC متساوی الساقین باشد. حال به دو روش نشان می دهیم اندازه زاویه $\hat{A}$ برابر 60° درجه است.

روش اول: P را روی رأس A در نظر می گیریم.



چون مثلث متساوی الساقین است عمود منصف RQ همان ارتفاع است. فرض می کنیم این عمود منصف، دایره w مکان هندسی را غیر از O در S قطع کند. O مرکز دایره AQR نیست چرا که در این صورت

$$OB = OA = OR$$

که ممکن نیست. پس S مرکز آن است. داریم:

$$SA = SQ \Rightarrow \angle SAQ = \angle SQA$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle CAQ = \angle BAQ - \angle BAC = 90^\circ - \hat{A} \\ \angle SAC = \frac{\hat{A}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle SAQ = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

از عبارات بالا نتیجه می شود:

$$\angle SQA = \angle SAQ = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \angle ASQ = 180^\circ - 2(90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}) = \hat{A}$$

$$\Rightarrow \angle CQA = 90^\circ - \angle ASQ = 90^\circ - \hat{A}, \angle AQS = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \angle AQC = \frac{\hat{A}}{2}$$

هم چنین داریم:

$$\angle ACD = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - B) = \hat{B}$$

در دایره محیطی ACQ داریم:

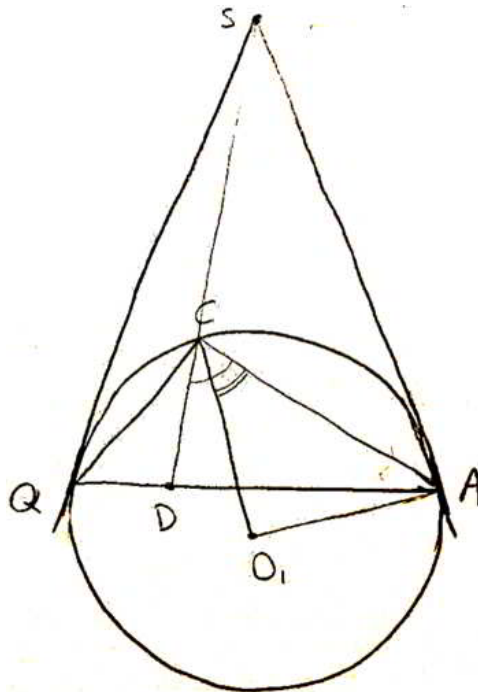
راه حل سؤال های آزمون مرحله دوم سی و پنجمین المپیاد ریاضی ایران

$$CAS = \frac{\hat{A}}{2} = AQC = \frac{\text{کمان } AC}{2}$$

$$CQS = 90 - \hat{A} = CAQ = \frac{\text{کمان } CQ}{2}$$

در نتیجه AS و QS بر دایره محیطی ACQ مماس هستند.

اگر O_1 را مرکز دایره محیطی ACQ بگیریم داریم:



$$CO_1A = \text{کمان } AC = 2CQA = \hat{A}$$

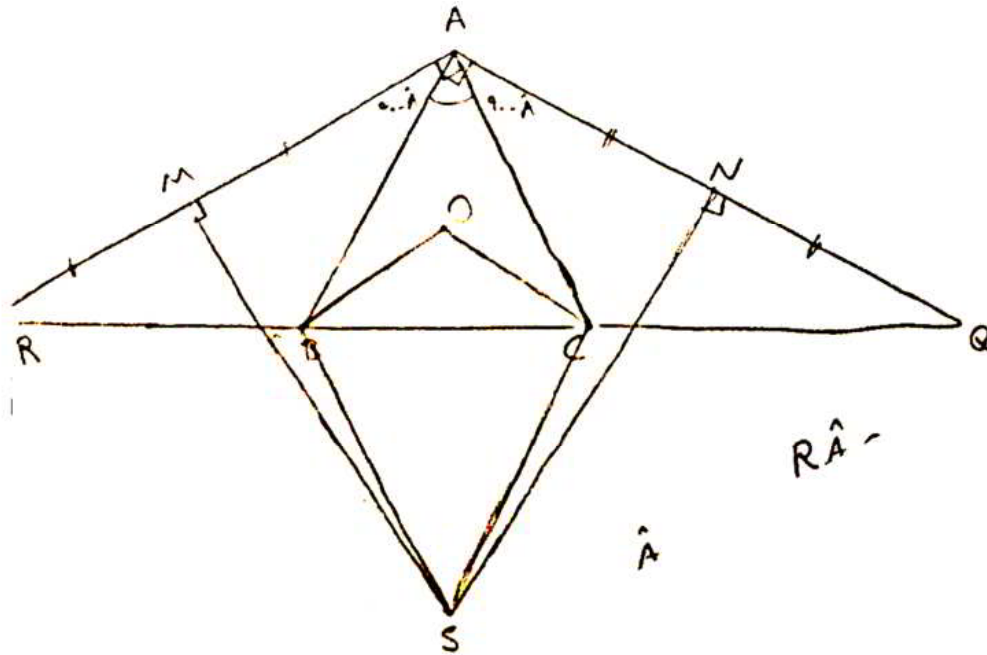
$$CAO_1 = ACO_1 = \frac{180 - CO_1A}{2} = 90 - \frac{\hat{A}}{2}$$

از طرفی داشتیم $ACD = \hat{B} = 90 - \frac{\hat{A}}{2}$ پس $ACD = ACO_1$ در نتیجه C روی AO_1 است و

$$AC = CQ$$

و در نتیجه $CAQ = CQA$ و لذا $90 - \hat{A} = \frac{\hat{A}}{2}$ پس $\frac{3}{2}\hat{A} = 90$ و این یعنی $\hat{A} = 60$.

روش دوم: از برهان خلف استفاده می کنیم، فرض کنید $\hat{A} < 60$.



با توجه به این که $\hat{A} = 180 - \angle RAQ$ داریم $\frac{\hat{A}}{2} = R = Q$.

$$\hat{A} < 60 \Rightarrow 90 - \hat{A} > \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow RB > AB, QC > AC$$

در نتیجه نقاط A و B در یک طرف عمودمنصف AR ، و نقاط A و C در یک طرف عمودمنصف AQ هستند پس $MSN > BSC$ و از طرفی چون MAN و $BOCS$ محاطی هستند داریم:

$$\left. \begin{array}{l} MSN = 180 - MAN = \hat{A} \\ BSC = 180 - BOC = 180 - 2\hat{A} \end{array} \right\} \Rightarrow 180 - 2\hat{A} < \hat{A} \Rightarrow \hat{A} > 60.$$

که با فرض $\hat{A} < 60$ در تناقض است.

اگر هم فرض کنیم $\hat{A} > 60$ این بار تمام نابرابری‌های فوق برعکس می‌شوند و نتیجه می‌شود $\hat{A} < 60$ که باز تناقض است. فقط باید توجه شود که در مواقعی که S و A در یک سمت BC قرار دارند منظور از زاویه BSC قسمت بزرگ آن است.