

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچه سؤالات مرحله اول سال ۱۳۹۶

# سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

ساعت: ۰۹:۰۰ صبح

## کد دفترچه: ۱

بانک مقالات ایران

مرکز دانش و مقالات  
علمی و پژوهشی و  
سؤالات آزمونها

www.edub.ir

| تعداد سؤالات | مدت آزمون (دقیقه) |              |
|--------------|-------------------|--------------|
|              | پاسخ کوتاه        | پنج گزینه‌ای |
| ۹            | ۱۶                | ۲۱۰          |

نام :

نام خانوادگی :

شماره صندلی :

### توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

- ۱ - کد دفترچه سؤالات شما ۱ است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ‌نامه با مداد پر کنید. در غیر این صورت پاسخ‌نامه شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد دفترچه سؤالات شما که در زیر هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است، با کد اصلی که در همین صفحه است، یکی باشد.
- ۲ - بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همه برگه‌های دفترچه سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۳ - یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در پایین پاسخ‌نامه را با مداد مشکی بنویسید.
- ۴ - برگه پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۵ - سؤالات به دو شکل پاسخ کوتاه و پنج گزینه‌ای هستند؛ پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست به هر سؤال پنج گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. پاسخ نادرست به سؤالات پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.
- ۶ - همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ماشین حساب و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- ۷ - شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند. به علاوه تعدادی از دانش‌آموزان دهمی، برای شرکت آزمایشی و کسب تجربه، برای شرکت در آزمون مرحله دوم پذیرفته خواهند شد.
- ۸ - داوطلبان نمی‌توانند دفترچه سؤالات را با خود ببرند. (دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود).
- ۹ - آدرس وب‌گاه کمیته علمی المپیاد ریاضی ایران [www.mathysc.ir](http://www.mathysc.ir) و آدرس کانال تلگرام کمیته [@Iran\\_IMO](https://t.me/Iran_IMO) است.

آزمون مرحله اول سی و ششمین المپیاد  
ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.

| سوال ۱ |       |       |       |      |
|--------|-------|-------|-------|------|
| پہلا   | دوسرا | تیسرا | چوتھا | پنجم |
| ۰      | ۰     | ۰     | ۰     | ●    |
| ۱      | ۱     | ۱     | ۱     | ۱    |
| ۲      | ۲     | ۲     | ۲     | ۲    |
| ۳      | ۳     | ۳     | ۳     | ۳    |
| ۴      | ۴     | ۴     | ۴     | ۴    |
| ۵      | ۵     | ۵     | ●     | ۵    |
| ۶      | ●     | ۶     | ۶     | ۶    |
| ۷      | ۷     | ۷     | ۷     | ۷    |
| ۸      | ۸     | ۸     | ۸     | ۸    |
| ۹      | ۹     | ●     | ۹     | ۹    |

جواب سؤال‌های پاسخ‌کوتاه، عددی نامفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰٫۷۳ بود شما باید از قسمت اعشاری صرف‌نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید.

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای، شمارهٔ گزینهٔ درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

۰. (سؤال شماره صفر!) کد سؤالات شما چند است؟ آن را در صفحه اول پاسخنامه خود مشخص کنید. مشخص نکردن این کد، عواقب ناگواری دارد که روی جلد پاسخنامه توضیح داده شده است.

۱. در روستایی با هزار نفر جمعیت، دویست نفر مبتلا به نوعی بیماری شده‌اند. با انجام یک آزمایش می‌توان بیماری را تشخیص داد ولی نتیجه خطا دارد، به این معنی که فرد بیمار را به احتمال ۵ درصد سالم و فرد سالم را به احتمال ۵ درصد بیمار اعلام می‌کند. فردی را به تصادف از مردم این روستا انتخاب کرده و از او آزمایش می‌گیریم. چند درصد احتمال دارد آن فرد بیمار اعلام شود؟

۲. کارخانه‌ای محصولاتش را در بسته‌هایی مکعبی بسته‌بندی می‌کند و در انبار هر ۵۱۲ بسته را به شکل مکعبی  $8 \times 8 \times 8$  به هم متصل می‌کنند. در شرایطی که دمای هوا از حدی بیش‌تر شود لازم است با جدا کردن این مجموعه ۵۱۲ تایی با صفحات افقی و عمودی، هر بسته دست‌کم یک وجه داشته باشد که با وجوه بسته‌های دیگر در تماس نباشد. کم‌ترین تعداد صفحه برای رسیدن به چنین وضعیتی چند تا است؟

۳. چند عدد هشت‌رقمی در مبنای چهار با ارقام ۱، ۲ و ۳ وجود دارد که بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

۴. پنج نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تایی هم خط نیستند. همهٔ پاره‌خط‌هایی که رؤسشان این نقاط است را رسم کرده‌ایم. حداقل چند نقطهٔ جدید در محل تقاطع پاره‌خط‌ها به وجود می‌آید؟

(۱) صفر      ۱ (۲)      ۲ (۳)      ۳ (۴)      ۵ (۵)



# آزمون مرحله اول سی و ششمین المپیاد

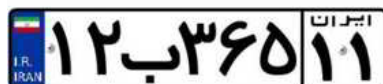
## ریاضی کشور

۵. دور گود یک زورخانه ۱۲۸ صندلی، دایره‌وار، چیده شده است. تماشایی اولی که وارد زورخانه می‌شود روی صندلی شماره یک می‌نشیند. از آن‌جا که سرماخوردگی در شهر شایع شده، هر فردی که وارد می‌شود روی صندلی‌ای می‌نشیند که فاصله‌اش با نزدیک‌ترین صندلی اشغال‌شده بیش‌ترین مقدار ممکن باشد و اگر چند صندلی با این خاصیت وجود داشت آن‌که شماره‌اش کم‌تر است را انتخاب می‌کند. نفر ۳۹م روی کدام صندلی می‌نشیند؟

۶. عددی طبیعی  $n$ ، کوچک‌ترین عددی است که باقی‌مانده  $۳n + ۴۵$  بر  $۱۰۶۰$  برابر ۱۶ است. باقی‌مانده  $۱۸n + ۱۷$  بر  $۱۹۲۰$  چند است؟

۷. مساحت محصور بین نمودار تابع  $y = [۱۰x] + \sqrt{1-x^2}$  در بازه  $[۰, ۱]$  و محور طول‌ها چه‌قدر است؟ (منظور از  $[t]$ ، جزء صحیح عدد  $t$  است.)

۸. شماره اصلی پلاک یک خودرو متشکل از یک عدد دو رقمی در سمت چپ، یکی از حروف الفبا در وسط و یک عدد سه رقمی در سمت راست است و از رقم صفر در این دو عدد استفاده نمی‌شود. به هر پلاک، ضرب دو عدد مورد اشاره را نسبت می‌دهیم. مثلاً به پلاک زیر عدد  $۴۳۸۰ = ۱۲ \times ۳۶۵$  را نسبت می‌دهیم.



میانگین اعداد نسبت‌داده‌شده به تمام پلاک‌های ممکن، چند است؟

۹. قسمتی از پارک جنگلی لتیان که بین دو جاده واقع شده، آتش گرفته است. آتش با سرعت  $۱۰$  کیلومتر بر ساعت گسترش می‌یابد. اگر فاصله نقطه شروع آتش‌سوزی تا هر دو جاده  $۱۰$  کیلومتر باشد، پس از  $۲$  ساعت مساحت ناحیه سوخته‌شده چند کیلومتر مربع است؟ (جاده‌ها را خط‌های طولانی، راست و موازی با هم بگیرید و فرض کنید آتش از جاده عبور نمی‌کند.)

$$(۱) \quad ۲۰۰\sqrt{۳} \quad (۲) \quad ۱۰۰\sqrt{۳} \quad (۳) \quad ۴۰۰\sqrt{۳} + ۴۰۰\frac{\pi}{۳} \quad (۴) \quad ۲۰۰\sqrt{۳} + ۴۰۰\frac{\pi}{۳} \quad (۵) \quad ۴۰۰\sqrt{۳}$$

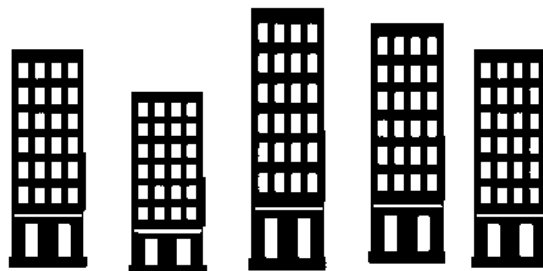
۱۰. مثلث  $ABC$  را در نظر بگیرید که  $AB = AC = ۱۵$  و  $BC = ۱۸$ . نقاط  $D$  و  $E$  را به ترتیب روی  $CA$  و  $CB$  طوری بگیرید که  $CD = ۵$  و  $CE = ۳$ . نقطه  $F$  را روی نیم‌خط  $\overrightarrow{DE}$  طوری در نظر بگیرید که  $EF = ۸$ . نقطه  $M$  را وسط  $AB$  و  $N$  را نقطه برخورد  $FM$  با  $BC$  بگیرید. طول  $CN$  چه‌قدر است؟



# آزمون مرحله اول سی و ششمین المپیاد

## ریاضی کشور

۱۱. طبق ضوابط، ساختمان‌های یک کوچه نباید بیش از ۹ طبقه داشته باشند. به علاوه اگر تعداد طبقات دو ساختمان، با هر چه قدر فاصله، برابر باشد، حتماً باید ساختمانی با تعداد طبقات بیش‌تر از آن دو بین‌شان وجود داشته باشد. حداکثر چند ساختمان در یک سمت کوچه می‌توان ساخت؟



۱۲. چند سه تایی  $(a, b, c)$  از اعداد طبیعی اکیداً کم‌تر از ۵۱ داریم که  $a + b + c$  بر  $a$ ،  $b$  و  $c$  بخش‌پذیر باشد؟

۱۳. فردی می‌خواهد کنار دیوار باغش، ناحیه‌ای را برای نگهداری از مرغ و خروس‌هایش بسازد. او سه نرده به طول ده متر دارد. با استفاده از دیوار باغ، که مستقیم و طولانی است و این سه نرده، حداکثر مساحتی را که می‌تواند محصور کند چند مترمربع است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲)  $۵۰ + ۲۵\sqrt{۳}$  (۳)  $۵۰ + ۵۰\sqrt{۲}$  (۴)  $۷۵\sqrt{۳}$  (۵) ۳۰۰

۱۴. برای چند مقدار صحیح  $k$ ، دستگاه معادلات زیر جوابی غیر از  $a = b = c = ۰$  در اعداد حقیقی دارد؟

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = kc(a + b) \\ b^2 + c^2 = ka(b + c) \\ c^2 + a^2 = kb(c + a) \end{cases}$$

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵) بی‌نهایت

۱۵. فرض کنید  $a_1, a_2, \dots, a_p$  همان اعداد ۱ تا ۲۰ باشند که به ترتیبی دل‌خواه نوشته شده‌اند. عبارت  $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_p$  چند مقدار مختلف می‌تواند باشد؟

۱۶. زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی دارای این خاصیت است که برای هر دو عضو متمایز آن مثل  $x$  و  $y$  داریم  $(x + y - 1)^2 = xy + 1$ . این مجموعه حداکثر چند عضو دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) بی‌نهایت



# آزمون مرحله اول سی و ششمین المپیاد ریاضی کشور

۱۷. دو عدد طبیعی  $m$  و  $n$  کم‌تر از ۵۰۰ هستند و  $[m, n] = (m - n)^2$ . حداکثر مقدار  $m + n$  چه قدر است؟ ( $[m, n]$  کوچک‌ترین مضرب مشترک  $m$  و  $n$  است).

۱۸. سه میله با طول‌های ۱۳۹۶، ۱۴۳۹ و ۲۰۱۸ میلی‌متر روی زمین از یک سر به هم لولا شده‌اند. کم‌ترین مقدار ممکن برای شعاع دایره‌ای که از سه سر دیگر میله‌ها می‌گذرد چند میلی‌متر است؟

۱۹. فرض کنید  $x \geq y \geq z$  اعدادی حقیقی و مثبت باشند که

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$$

حداقل مقدار  $\frac{x}{z}$  کدام است؟

۱ (۱)       $\sqrt{2}$  (۲)       $\sqrt{3}$  (۳)      ۲ (۴)      ۴ (۵)

۲۰. در چهارضلعی محدب و محاطی  $ABCD$  داریم  $\angle B = 110^\circ$ . محل برخورد  $AD$  و  $BC$  را  $E$  و محل برخورد  $AB$  و  $CD$  را  $F$  می‌نامیم. اگر عمودهای  $E$  بر  $AB$  و  $F$  بر  $BC$  یک‌دیگر را روی دایره محیطی چهارضلعی در نقطه  $P$  قطع کنند. اندازه زاویه  $\angle PDF$  چند درجه است؟

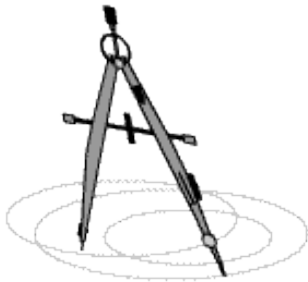
۲۱. نقطه  $P$  درون یا روی مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  به ضلع یک قرار دارد. قرینه  $P$  نسبت به  $AB$  را  $K$ ، قرینه  $K$  نسبت به  $BC$  را  $M$  و قرینه  $M$  نسبت به  $AC$  را  $N$  می‌نامیم. حداکثر طول  $NP$  کدام گزینه است؟

۱ (۱)       $2\sqrt{3}$  (۲)       $\sqrt{3}$  (۳)       $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)      ۳ (۵)

۲۲. هشت عدد کاشی مشابه  $1 \times 2$  داریم که هر کدام از یک مربع قرمز و یک مربع آبی تشکیل شده است. به چند حالت می‌توان یک ناحیه  $4 \times 4$  را با این کاشی‌ها پوشاند طوری که هر سطر و هر ستون آن دو مربع قرمز و دو مربع آبی داشته باشد؟



## آزمون مرحله اول سی و ششمین المپیاد ریاضی کشور



۲۳. پروانه پرگاری خرید و پس از باز کردن بسته آن متوجه شد طول میله سوزن دار ۱۰ سانتی متر و طول میله مدادی ۱۶ سانتی متر است! فرض کنید برای این که بتوان با آن پرگار دایره کشید، باید زاویه مداد با کاغذ دست کم ۳۰ درجه باشد ولی سوزن می تواند هر زاویه ای با صفحه کاغذ داشته باشد. تفاضل شعاع بزرگترین دایره و شعاع کوچکترین دایره ای که می توان با این پرگار کشید بر حسب سانتی متر به کدام گزینه نزدیک تر است؟

۲۰ (۵)

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

۲۴. دنباله  $\{a_n\}$  با فرمول زیر تعریف می شود:

$$a_n = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$$

حاصل عبارت زیر چه قدر است؟

$$\frac{4}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{4}{a_{96}}$$

۱ (۱)  $\sqrt{18241}$     ۲ (۲)  $\sqrt{18625} - 1$     ۳ (۳)  $\sqrt{18625}$     ۴ (۴)  $\sqrt{19013} - 1$     ۵ (۵)  $\sqrt{19013}$

۲۵. دانشمندان سیاره ای کوچک به شعاع ۳۰ کیلومتر کشف کرده اند که تمام سطح آن را آب فرا گرفته است. شهابی کروی شکل به این سیاره برخورد می کند و کاملاً در آب فرو می رود و ارتفاع آب روی سطح سیاره یک سانتی متر افزایش پیدا می کند. شعاع شهاب چند متر بوده است؟

پاسخنامه (کلید اولیه) سوالات دفترچه کد یک (۱) مرحله اول آزمون سال تحصیلی ۹۷-۱۳۹۶ المپیاد ریاضی

| سوال شماره | گزینه/پاسخ صحیح | توضیح | سوال شماره | گزینه/پاسخ صحیح | توضیح |
|------------|-----------------|-------|------------|-----------------|-------|
| 1          | ۲۳              |       | 51         |                 |       |
| 2          | ۳               |       | 52         |                 |       |
| 3          | ۲۱۸۷            |       | 53         |                 |       |
| 4          | ۲               |       | 54         |                 |       |
| 5          | ۲۷              |       | 55         |                 |       |
| 6          | ۱۰۴۳            |       | 56         |                 |       |
| 7          | ۵               |       | 57         |                 |       |
| 8          | ۳۰۵۲۵           |       | 58         |                 |       |
| 9          | ۴               |       | 59         |                 |       |
| 10         | ۹               |       | 60         |                 |       |
| 11         | ۵۱۱             |       | 61         |                 |       |
| 12         | ۲۲۱             |       | 62         |                 |       |
| 13         | ۴               |       | ۶3         |                 |       |
| 14         | ۲               |       | 64         |                 |       |
| 15         | ۱۰۱             |       | 65         |                 |       |
| 16         | ۳               |       | 66         |                 |       |
| 17         | ۸۴۰             |       | 67         |                 |       |
| 18         | ۳۱۱             |       | 68         |                 |       |
| 19         | ۵               |       | 69         |                 |       |
| 20         | ۵۵              |       | 70         |                 |       |
| 21         | ۲               |       | 71         |                 |       |
| 22         | ۵۷۶             |       | 72         |                 |       |
| 23         | ۴               |       | 73         |                 |       |
| 24         | ۲               |       | 74         |                 |       |
| 25         | ۳۰۰             |       | 75         |                 |       |
| 26         |                 |       | 76         |                 |       |
| 27         |                 |       | 77         |                 |       |
| 28         |                 |       | 78         |                 |       |
| 29         |                 |       | 79         |                 |       |
| 30         |                 |       | 80         |                 |       |
| 31         |                 |       | 81         |                 |       |
| 32         |                 |       | 82         |                 |       |
| 33         |                 |       | 83         |                 |       |
| 34         |                 |       | 84         |                 |       |
| 35         |                 |       | 85         |                 |       |
| 36         |                 |       | 86         |                 |       |
| 37         |                 |       | 87         |                 |       |
| 38         |                 |       | 88         |                 |       |
| 39         |                 |       | 89         |                 |       |
| 40         |                 |       | 90         |                 |       |
| 41         |                 |       | 91         |                 |       |
| 42         |                 |       | 92         |                 |       |
| 43         |                 |       | 93         |                 |       |
| 44         |                 |       | 94         |                 |       |
| 45         |                 |       | 95         |                 |       |
| 46         |                 |       | 96         |                 |       |
| 47         |                 |       | 97         |                 |       |
| 48         |                 |       | 98         |                 |       |
| 49         |                 |       | 99         |                 |       |
| 50         |                 |       | 100        |                 |       |